....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Grundzüge der Höheren Mathematik 2 für Lehramt an Berufsschulen (MA9952)

Dr. M. Prähofer

2. August 2017, 10:30 – 11:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **6** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **60** min

Hilfsmittel: Ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung

1. **Vektoren** **[5 Punkte]**

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie $\beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\vec{b}$ senkrecht auf $\vec{a}$ steht

(b) Geben Sie einen Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ an, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht, und die Länge 1 hat.

(c) Welche Fläche hat das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Parallelogramm?

LÖSUNG:

(a) $0 = \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + \beta$. Für $\beta = -1$ ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, die beiden Vektoren stehen also senkrecht aufeinander.

(b) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und hat die Länge $\sqrt{6}$. Somit hat $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ die geforderten Eigenschaften.

(c) Die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6}$.

2. **Lineare Gleichungssysteme** **[8 Punkte]**

Geben Sie die Menge aller Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems an:

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 1 \\ 2x + y - z &= 1 \\ 5x - z &= 2 \end{aligned}$$

LÖSUNG:

Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -15 & 9 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Da die letzte Zeile verschwindet gibt es unendlich viele Lösungen. Man kann $z \in \mathbb{R}$ beliebig wählen. Die Gleichung $-5y + 3z = -1$ ergibt dann $y = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}z$, und aus der Gleichung $x + 3y - 2z = 1$ erhält man durch Einsetzen $x = 1 - 3y + 2z = 1 - 3(\frac{1}{5} + \frac{3}{5}z) + 2z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}z$. Somit ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\{x \in \mathbb{R}^3 | Ax = b\} = \{ \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(2 + z) \\ \frac{1}{5}(1 + 3z) \\ z \end{pmatrix} | z \in \mathbb{R}\}.$$

3. **Matrizen** **[9 Punkte]**

(a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ -3x + 2y - z \end{pmatrix}$. Wie lautet die darstellende Matrix A von f?

(b) Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie B^2 und, wenn möglich, B^{-1}.

(c) Berechnen Sie die Determinante von $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 18 \\ 0 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

$(B|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) =$
$(E|B^{-1})$, also $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

(c) $\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - 0 + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = -7 + 28 = 21.$

4. **Kurven** **[15 Punkte]**

Gegeben ist die Kurve $\vec{x} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)^3 \\ \sin(t)^3 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $\vec{x}(t)$ für $t = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

(b) Berechnen Sie $\dot{\vec{x}}(t)$, $|\dot{\vec{x}}(t)|$ und $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|}$.

(c) Skizzieren Sie die Menge $\{\vec{x}(t) \,|\, t \in [0, 2\pi]\}$.

(d) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\vec{x}(t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, also im rechten oberen Quadranten. Hinweis: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x)^2 = 2\sin(x)\cos(x)$.

Lösung:

(a) $\vec{x}(0) = (1, 0)$, $\vec{x}(\frac{\pi}{6}) = \begin{pmatrix} (\frac{\sqrt{3}}{2})^3 \\ (\frac{1}{2})^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\binom{3\sqrt{3}}{1} \approx \binom{0.6}{0.125}$, $\vec{x}(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} (\frac{\sqrt{2}}{2})^3 \\ (\frac{\sqrt{2}}{2})^3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4}\binom{1}{1} \approx \binom{0.35}{0.35}$, $\vec{x}(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{8}\binom{1}{3\sqrt{3}} \approx \binom{0.125}{0.6}$, $\vec{x}(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$.

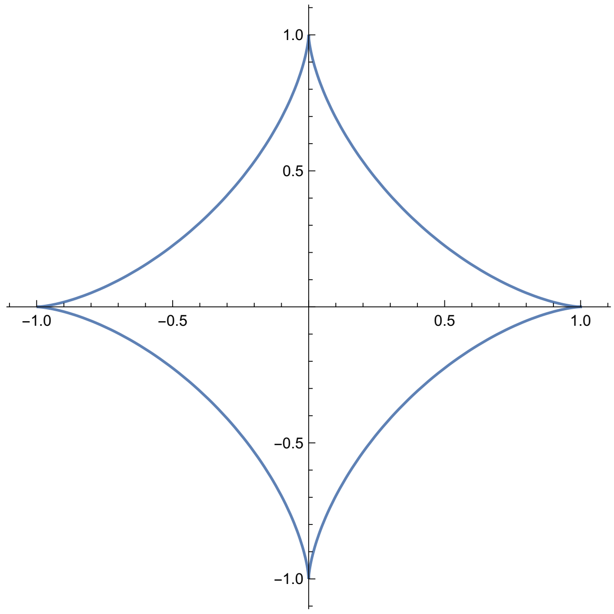
(b) $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -3\cos(t)^2\sin(t) \\ 3\sin(t)^2\cos(t) \end{pmatrix} = 3\sin(t)\cos(t)\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

$|\dot{\vec{x}}(t)| = 3|\sin(t)\cos(t)|\sqrt{(-\cos(t))^2 + \sin(t)^2} = 3|\sin(t)\cos(t)|$.

$\lim\limits_{t\to 0} \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{3\sin(t)\cos(t)\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}}{3|\sin(t)\cos(t)|} = \lim\limits_{t\to 0} \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

da für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt: $\sin(t) = |\sin(t)|$ und $\cos(t) = |\cos(t)|$.

(c)



(d) Die Bogenlänge ist $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |\dot{\vec{x}}(t)|\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3|\cos t \sin t|\mathrm{d}t = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\cos t\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\left[\sin(t)^2\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$. (Sie ist also etwas kürzer als die Länge eines Viertelkreisbogens, $\frac{\pi}{2}$.)

5. **Extremwertbestimmung** **[9 Punkte]**
Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-2x}$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten von f.

(b) Bestimmen Sie alle Punkte, an denen der Gradient von f verschwindet.

(c) Sind die in (b) bestimmten Punkte globale Maxima oder Minima von f? Begründen Sie (ohne die Hessematrix zu berechnen).

LÖSUNG:

(a) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-2x} \\ \partial_y (x^2+y^2)\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x - 2(x^2+y^2))\mathrm{e}^{-2x} \\ 2y\mathrm{e}^{-2x} \end{pmatrix}$

(b) $0 = \nabla f(x,y)$ bedeutet, (da $\mathrm{e}^{-2x} > 0$), $0 = 2y$ und $0 = 2(x-x^2-y^2)$, also $y = 0$ und $x(1-x) = 0$, also $x = 0$ oder $x = 1$. Somit ist $\nabla f(0,0) = 0$ und $\nabla f(1,0) = 0$.

(c) $(0,0)$ ist absolutes Minimum:
Es ist $f(x,y) \geq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, da $x^2+y^2 \geq 0$ und $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ immer ist. Wegen $f(0,0) = 0$ ist also der Ursprung $(0,0)$ ein absolutes Minimum der Funktion .
$(1,0)$ ist weder ein Minimum noch ein Maximum, sondern ein Sattelpunkt:
Für $x = 1$ hat $y \mapsto f(1,y) = \frac{1}{\mathrm{e}^2}(1+y^2)$ ein echtes absolutes Minimum bei $y = 0$. Der Punkt $(1,0)$ kann also kein lokales (und damit auch kein globales) Maximum von f sein.
Für $y = 0$ hat $x \mapsto g(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x}$, bei $x = 1$ ein lokales Maximum ($g'(x) = 2x(1-x)\mathrm{e}^{-2x}$ ist gleich 0 für $x = 1$, größer 0 für $0 < x < 1$ und kleiner 0 für $x > 1$).
Also kann $(1,0)$ kein Minimum von f sein. Wie gezeigt, liegt dort ein Sattelpunkt vor.

6. **Mehrdimensionale Integration** **[10 Punkte]**

(a) Berechnen Sie das Volumen unter dem Graphen der Funktion $f(x,y) = x^2y^2$ auf der Menge $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [0,2], x \leq y \leq 2\}$.

(b) Berechnen Sie das Integral $\iint\limits_B \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}(x,y)$ auf der Menge $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 1\}$ mit Hilfe von Polarkoordinaten. HINWEIS: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\mathrm{e}^{r^2} = 2r\mathrm{e}^{r^2}$.

LÖSUNG:

(a) $\iint\limits_A f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_0^2 \int\limits_x^2 x^2y^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left[x^2 \frac{y^3}{3}\right]_{y=x}^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(\frac{8}{3}x^2 - \frac{x^5}{3}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{8}{9}x^3 - \frac{x^6}{18}\right]_{x=0}^2$
$= \frac{64}{9} - \frac{64}{18} = \frac{64}{18} = \frac{32}{9}$.

(b) Es ist $B = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi]\}$ und $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \mathrm{e}^{r^2}$. Daher gilt mit der Substitutionsregel für Polarkoordinaten
$\iint\limits_B \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}(x,y) = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \mathrm{e}^{r^2} r\mathrm{d}(r,\varphi) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{r^2} r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r = 2\pi \int\limits_0^1 r\mathrm{e}^{r^2}\mathrm{d}r = 2\pi\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{r^2}\right]_0^1 = \pi(\mathrm{e}-1)$.