Dr. M. Prähofer

Grundzüge der Höheren Mathematik 2 für Lehramt an Beruflichen Schulen MA9952

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9952_2017S

Sommersemester 2017
Lösungsblatt 11
(25.7.2017)

Präsenzaufgaben

P11.1. Vektoren

Es ist $\vec{a} = (1, -1, 3)$, $\vec{b} = (2, -1, -1)$. Berechnen Sie:

(a) den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$,

(b) den Vektor $\vec{c}$ der Länge 1, der auf der Winkelhalbierenden zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegt,

(c) einen Vektor $\vec{d}$, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegt, so dass das Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{d}$ aufgespannten Spats gleich 1 ist.

Lösung:

(a) Wegen $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = 0$ stehen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

(b) $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{22}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{22}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{3}{\sqrt{22}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

(c) $\vec{d}_0 = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Somit ist $\vec{d} = \lambda\vec{d}_0$ mit noch zu bestimmendem $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass
$1 = \vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda\vec{d}_0 \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda\vec{d}_0 \cdot \vec{d}_0 = \lambda|\vec{d}_0|^2 = 66\lambda$. Mit $\lambda = \frac{1}{66}$ folgt $\vec{d} = \frac{1}{66}\begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$.

P11.2. Lineare Gleichungssysteme

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 + 5x_3 &= 3 \\ 6x_1 - 2x_2 + 12x_3 &= 14 \end{aligned}$$

besitzt genau 3 Lösungen.

(a) Ist die Aussage wahr oder falsch?

(b) Geben Sie alle Lösungen des Gleichungssystems an.

LÖSUNG:

(a) Die Aussage ist falsch, da ein lineares Gleichungssystem entweder keine, eine oder unendlich viele Lösungen hat.

(b) Wir lösen $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & -2 & 12 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}$:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 5 & | & 3 \\ 6 & -2 & 12 & | & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 5 & | & 3 \\ 0 & 2 & 10 & | & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 5 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

woraus man die äquivalenten Gleichungen $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$ und $x_2 + 5x_3 = 3$ erhält, mit der Lösung $x_3 \in \mathbb{R}$, $x_2 = 3 - 5x_3$, $x_1 = \frac{1}{3}(4 + 2x_2 - x_3) = \frac{1}{3}(4 + 6 - 10x_3 - x_3) = \frac{10}{3} - \frac{11}{3}x_3$. Die Lösungsmenge ist

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, Ax = b\} = \{ \begin{pmatrix} \frac{10}{3} - \frac{11}{3}t \\ 3 - 5t \\ t \end{pmatrix} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$$

P11.3. Matrizen

Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Sind AB, bzw., BA definiert, wenn ja, wie lauten sie?

(b) Geben Sie, wenn möglich, Determinante und Inverse von A, B, AB, bzw., BA an.

LÖSUNG:

(a) Wegen $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ sind $AB \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $BA \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ wohldefiniert. Es ist $AB = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 2 \\ -6 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

(b) Determinante und Inverse sind nur für quadratische Matrizen definiert, also nicht für A und B. Es ist $\det(AB) = 8 \cdot 1 - 8 \cdot 3 = -16$ und
$\det(BA) = 13 \det \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 0.$
$(AB)^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{16} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. BA ist nicht invertierbar da die Determinante gleich Null ist.

P11.4. Kurven

Geben Sie Geschwindigkeitsvektor und Bogenlänge der Kurve $\vec{a}(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2t)$, $t \in [0, \pi]$, an.

LÖSUNG:

$$\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2 \end{pmatrix}, \; |\dot{\vec{a}}(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Die Bogenlänge ist $\int_0^\pi |\dot{\vec{a}}(t)| \mathrm{d}t = \int_0^\pi \sqrt{5} \mathrm{d}t = \pi\sqrt{5}$.

P11.5. Skalar- und Vektorfelder

Seien $f(x, y, z) = y\sqrt{x} + \cos^2 z$ und $\vec{v}(x, y, z) = (y^3 + zx^2, y^2, 5z + \mathrm{e}^{xy})$. Berechnen Sie den Gradienten von f und die Divergenz und Rotation von $\vec{v}$.

LÖSUNG:

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y}{2\sqrt{x}} \\ \sqrt{x} \\ -2\cos z \sin z \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(x,y,z) = \nabla \cdot \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} (x,y,z)$$
$$= \partial_x v_1(x,y,z) + \partial_y v_2(x,y,z) + \partial_z v_3(x,y,z) = 2zx + 2y + 5.$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y,z) = \nabla \times \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} (x,y,z)$$
$$= \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} (x,y,z) = \begin{pmatrix} x\mathrm{e}^{xy} \\ x^2 - y\mathrm{e}^{xy} \\ -x\mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix}.$$

P11.6. Volumen einer Menge

Berechnen Sie das Volumen von $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0,2], y \in [-x,x], z \in [0, xy^2]\}$.

LÖSUNG:

Die Menge V kann beschrieben werden, als die Menge unter dem Graphen der Funktion $f(x,y) = xy^2$, definiert auf dem Normalbereich $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2], -x \leq y \leq x\}$. Somit ist das Volumen der Menge V gegeben durch

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{-x}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 x \left(\int\limits_{-x}^{x} y^2 \mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 x \left[\tfrac{y^3}{3} \right]_{y=-x}^{x} \mathrm{d}x$$
$$= \tfrac{2}{3} \int\limits_0^2 x x^4 \mathrm{d}x = \tfrac{2}{3} \left[\tfrac{x^5}{5} \right]_{x=0}^{2} = \tfrac{64}{15}.$$