DR. M. PRÄHOFER

**Grundzüge der Höheren Mathematik 2 für Lehramt an Beruflichen Schulen MA9952**

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9952_2017S

Sommersemester 2017
Lösungsblatt 10
(18.7.2017)

**Präsenzaufgaben**

## P10.1. Integration auf einem Rechteck

Auf dem Rechteck $R = [0,1] \times [0,2]$ sei die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ definiert. Berechnen Sie $\iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$.

LÖSUNG:

$$\iint\limits_R f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \Big( \int_0^2 (x^2+y^2)\mathrm{d}y \Big)\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[ x^2y + \tfrac{1}{3}y^3 \Big]_{y=0}^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 (2x^2 + \tfrac{8}{3})\mathrm{d}x$$
$$= \big[ \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{8}{3}x \big]_0^1 = \tfrac{2}{3} + \tfrac{8}{3} = \tfrac{10}{3}.$$

## P10.2. Integration über einen Normalbereich

Auf dem Normalbereich $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in [0,1], 0 \leq y \leq 2x\}$ sei die Funktion $f(x,y) = xy^2$ definiert. Berechnen Sie $\iint\limits_U f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$.

LÖSUNG:

$$\iint\limits_U f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \Big( \int_0^{2x} xy^2 \mathrm{d}y \Big)\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[ \tfrac{1}{3}xy^3 \Big]_{y=0}^{2x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \tfrac{8}{3}x^4 \mathrm{d}x = \big[ \tfrac{8}{3} \cdot \tfrac{x^5}{5} \big]_{x=0}^1 = \tfrac{8}{15}.$$

## P10.3. Substitution bei Polarkoordinaten

Auf dem Achtelkreis $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$ soll die Funktion $f(x,y) = xy$ integriert werden. Berechnen Sie $\iint\limits_U f(x,y)\mathrm{d}(x,y)$.

LÖSUNG:

Mit Polarkoordinaten $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ kann die Menge $U$ geschrieben werden als $U = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (r,\varphi) \in \tilde{U}\}$ mit $\tilde{U} = [0,2] \times [0, \frac{\pi}{4}]$. Mit der Substitutionsregel für Polarkoordinaten gilt:

$$\iint\limits_U f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \iint\limits_{\tilde{U}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\mathrm{d}(r,\varphi) = \int_0^2 \Big( \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\varphi \, r\sin\varphi \, r\mathrm{d}\varphi \Big)\mathrm{d}r =$$
$$= \int_0^2 r^3\mathrm{d}r \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \big[ \tfrac{r^4}{4} \big]_{r=0}^2 \cdot \big[ \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi \big]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} = \tfrac{16}{4} \cdot \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\big)^2 = 1.$$