TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Grundzüge der Höheren Mathematik 2
für Lehramt an Beruflichen Schulen
MA9952

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9952_2017S

Sommersemester 2017
Lösungsblatt 9
(11.7.2017)

Präsenzaufgaben

P9.1. Kettenregel mit mehreren Veränderlichen

Es sei $f(x,y) = (\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^y)$ und $g(x,y,z) = (x+yz, xz+y)$. Berechnen Sie $J_f(x,y)$, $J_g(x,y,z)$ und $J_{f\circ g}(x,y,z)$.

Lösung:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^y \end{pmatrix},\ J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & z & y \\ z & 1 & x \end{pmatrix},$$
$$J_{f\circ g}(x,y,z) = J_f(g(x,y,z))J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x+yz} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{xz+y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z & y \\ z & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x+yz} & z\mathrm{e}^{x+yz} & y\mathrm{e}^{x+yz} \\ z\mathrm{e}^{xz+y} & \mathrm{e}^{xz+y} & x\mathrm{e}^{xz+y} \end{pmatrix}$$

P9.2. Die Rotation eines Gradientenfeldes ist 0

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar mit stetigen Ableitungen. Zeigen Sie, dass dann $\nabla \times \nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ ist.

Lösung:

$$\nabla \times \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{pmatrix} (\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_2\partial_3 f - \partial_3\partial_2 f \\ \partial_3\partial_1 f - \partial_1\partial_3 f \\ \partial_1\partial_2 f - \partial_2\partial_1 f \end{pmatrix} (\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 0,$$

da nach dem Satz von Schwarz die Reihenfolge der Ableitungen vertauscht werden kann.

P9.3. Extremwertbestimmung

Mit welchen Seitenlängen muss ein Quader als Kantenmodell aus 12 m Draht gefertigt werden, damit er das maximale Volumen hat?

Lösung:

Seien die Seitenlängen des Quaders mit x, y und z bezeichnet. Dann soll das Volumen $V(x,y,z) = xyz$ unter der Bedingung $4x + 4y + 4z = 12$ und $x,y,z \geq 0$ maximiert werden. Durch Auflösen nach z, $z = 3 - x - y$, können wir auf zwei Variablen reduzieren, $f(x,y) = V(x,y,3-x-y) = 3xy - x^2y - xy^2$ unter den Bedingungen $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$. Auf dem Rand des Dreiecks, also für $x = 0$ oder $y = 0$ oder $x + y = 3$ gilt $f(x,y) = 0$. Da im Inneren des Dreiecks $f(x,y) > 0$ gilt, sind alle Randpunkte ein globales Minimum. Kandidaten für Extrema im Inneren, sind solche x,y), für die $\nabla f(x,y) = 0$ gilt, wegen $\nabla f(x,y) = \binom{3y-2xy-y^2}{3x-x^2-2xy}$ ist das gleichbedeutend mit $y(3-2x-y) = 0$ und $x(3-x-2y) = 0$. 1. Fall: $y = 0$ dann muss, um die zweite Gleichung zu erfüllen entweder $x = 0$ oder $x = 3$ sein. 2. Fall $y \neq 0$: (a) $x = 0$, dann ist $y = 3$. (b) $x \neq 0$, dann muss das lineare Gleichungssystem $2x + y = 3$, $x + 2y = 3$ erfüllt sein, mit der eindeutigen Lösung $x = 1$, $y = 1$. Alle Punkte bis auf $(1,1)$ liegen auf dem Rand des Dreiecks und sind schon als globale Minima bekannt. Für $x = 1$, $y = 1$ gilt $f(1,1) = 1 > 0$. Das Maximum ist also größer 0 und liegt daher nicht auf dem Rand des Dreiecks. Da $(1,1)$ der einzige verbleibende Kandidat für ein lokales Extremum ist, muss es da globale Maximum sein. Dass bei $(1,1)$ ein lokales Maximum vorliegt, kann man auch an der Hessematrix sehen, $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 3-2x-2y \\ 3-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$, $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -A$, wobei A wegen $\det(2) = 2 > 0$ und $\det(A) = 5 > 0$, positiv definit, $H_f(1,1)$ also negativ definit ist.

Hausaufgaben

H9.1. Kettenregel mit mehreren Veränderlichen

Es sei $f(x,y,z) = x + \sin(y+z) \in \mathbb{R}$ und $g(x,y) = (x+y, x^2-y, 2xy) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $J_f(x,y,z)$, $J_g(x,y)$ und $J_{f\circ g}(x,y)$.

LÖSUNG:

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(y+z) & \cos(y+z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3},\ J_g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -1 \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \text{ und}$$

$$\begin{aligned} J_{f\circ g}(x,y) &= J_f(x,y,z) J_g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(y+z) & \cos(y+z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & -1 \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2(x+y)\cos(y+z) & 1 + (-1+2x)\cos(y+z) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2} \end{aligned}$$

H9.2. Die Divergenz eines Rotationsfeldes ist 0

Sei $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal partiell differenzierbar mit stetigen Ableitungen. Zeigen Sie, dass dann $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}(\vec{x})) = 0$ ist.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v})(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} (\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} \\ &= \partial_1\partial_2 v_3 - \partial_1\partial_3 v_2 + \partial_2\partial_3 v_1 - \partial_2\partial_1 v_3 + \partial_3\partial_1 v_2 - \partial_3\partial_2 v_1 = 0, \end{aligned}$$

da nach dem Satz von Schwarz die partielen Ableitungen vertauscht werden können.

H9.3. Extremwertbestimmung

Bestimmen Sie unter der Nebenbedingung $2x + y + 3z = 1$ ein lokales Maximum der Funktion $V(x,y,z) = xyz$ und begründen Sie, ob dieses ein globales Maximum ist.

LÖSUNG:

Durch Auflösen nach y, $y = 1 - 2x - 3z$, können wir auf zwei Variablen reduzieren, $f(x,z) = V(x, 1-2x-3z, z) = xz - 2x^2z - 3xz^2$. x und z können beliebige Werte annehmen. Wir bestimmen Kandidaten für Extremwerte durch Nullsetzen des Gradienten, $\vec{0} = \binom{z-4xz-3z^2}{x-2x^2-6xz} = \binom{z(1-4x-3z)}{x(1-2x-6z)}$.

1. Fall: $z = 0$, dann folgt $x = 0$ oder $x = \frac{1}{2}$.

2. Fall: $z \neq 0$. (a) $x = 0$, dann ist $z = \frac{1}{3}$, andernfalls (b) $x \neq 0$ folgt $\binom{x}{z} = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \binom{1}{1} = \frac{1}{18}\left(\begin{smallmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 4 \end{smallmatrix}\right)\binom{1}{1} = \binom{1/6}{1/9}$. Kandidaten für Extrema sind also $(0,0)$, $(0,\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{2},0)$ und $(\frac{1}{6},\frac{1}{9})$. Die Hessematrix $H_f(x,z) = \left(\begin{smallmatrix} -4z & 1-4x-6z \\ 1-4x-6z & -6x \end{smallmatrix}\right)$ an diesen Stellen ist $H_f(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $H_f(0,\frac{1}{3}) = \left(\begin{smallmatrix} -\frac{4}{3} & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $H_f(\frac{1}{2},0) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ (alle weder positiv noch negativ definit), und $H_f(\frac{1}{6},\frac{1}{3}) = \left(\begin{smallmatrix} -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -1 \end{smallmatrix}\right)$. mit $A = -H_f(\frac{1}{6},\frac{1}{3})$ gilt $\det(A_{11}) = \frac{4}{9} > 0$ und $\det(A) = \frac{1}{3} > 0$ ist $H_f(\frac{1}{6},\frac{1}{3})$ negativ definit, es liegt also bei $(\frac{1}{6},\frac{1}{9})$ ein lokales Maximum vor. Die Funktion hat kein globales Maximum, da $f(-t,-t) = t^2 + 2t^3 + 3t^3$ für $t \to \infty$ beliebig groß wird.