TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik
Dr. M. Prähofer

Grundzüge der Höheren Mathematik 2 für Lehramt an Beruflichen Schulen MA9952

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9952_2017S

Sommersemester 2017
Lösungsblatt 8
(4.7.2017)

Präsenzaufgaben

P8.1. Partielle Ableitungen und Gradient

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die partiellen Ableitungen und den Gradienten:

(a) $f(x,y) = 3x + 5y$, (b) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$, (c) $f(a,b) = \frac{2a}{4b^2+5a}$.

Lösung:

(a) $\partial_x f(x,y) = 3$, $\partial_y f(x,y) = 5$, $\nabla f(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = \binom{3}{5}$.

(b) $\partial_1 f(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1,x_2) = 2x_1$, $\partial_2 f(x_1,x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1,x_2) = 2x_2$,
$\nabla f(x_1,x_2) = \binom{2x_1}{2x_2}$, bzw., $\nabla f(\vec{x}) = 2\vec{x}$.

(c) $\partial_a f(a,b) = \frac{2(4b^2+5a)-2a\cdot 5}{(4b^2+5a)^2} = \frac{8b^2}{(4b^2+5a)^2}$, $\partial_b f(a,b) = \frac{-2a\cdot 8b}{(4b^2+5a)^2} = -\frac{16ab}{(4b^2+5a)^2}$,
$\nabla f(a,b) = \frac{8b}{(4b^2+5a)^2}\binom{b}{-2a}$.

P8.2. Höhere partielle Ableitungen

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen:

(a) $f(x,y) = x + 5xy + 7y^2$, (b) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x-y} + \sin(xy)$.

Lösung:

(a) $\partial_x f(x,y) = 1 + 5y$, $\partial_y f(x,y) = 5x + 14y$,
$\partial_x\partial_x f(x,y) = 0$, $\partial_y\partial_x f(x,y) = 5$, $\partial_x\partial_y f(x,y) = 5$, $\partial_y\partial_y f(x,y) = 14$.

(b) $\partial_x f(x,y) = \mathrm{e}^{x-y} + \cos(xy)y$, $\partial_y f(x,y) = -\mathrm{e}^{x-y} + \cos(xy)x$,
$\partial_x\partial_x f(x,y) = \mathrm{e}^{x-y} - \sin(xy)y^2$,
$\partial_y\partial_x f(x,y) = -\mathrm{e}^{x-y} - \sin(xy)yx + \cos(xy)$,
$\partial_x\partial_y f(x,y) = -\mathrm{e}^{x-y} - \sin(xy)xy + \cos(xy)$,
$\partial_x\partial_x f(x,y) = \mathrm{e}^{x-y} + \cos(xy)x^2$.

P8.3. Lösung einer partiellen Differentialgleichung

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x,y) = xy + x\ln(\frac{y}{x})$ für $x, y > 0$ die partielle Differentialgleichung $x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = xy + f(x,y)$ erfüllt.

Lösung:

Bemerkung: Vor dem Ableiten empfiehlt es sich als Argument des Logarithmus auftauchende Produkte und Quotienten zunächst in Summen und Differenzen der Logarithmen zu verwandeln.

Also ist $f(x,y) = xy + x(\ln x - \ln y)$, und damit
$\partial_x f(x,y) = y + (\ln x - \ln y) + x(\frac{1}{x} + 0) = 1 + y + \ln\frac{x}{y}$, $\partial_y f(x,y) = x + x(0 + \frac{1}{y}) = x + \frac{x}{y}$.
Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich
$x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = x + xy + x\ln\frac{x}{y} + xy + x = xy + (xy + x\ln\frac{x}{y}) = xy + f(x,y)$,
wie behauptet.

Hausaufgaben

H8.1. Partielle Ableitungen und Gradient

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die partiellen Ableitungen und den Gradienten:

(a) $f(x,y) = x+y+x^2+y^2$, (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, (c) $f(x,y) = \ln(1+x^2y^4)$.

LÖSUNG:

(a) $\partial_x f(x,y) = 1+2x$, $\partial_y f(x,y) = 1+2y$, $\nabla f(x,y) = \binom{1+2x}{1+2y}$.

(b) $\partial_x f(x,y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\partial_y f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\nabla f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\binom{x}{y}$.

(c) $\partial_x f(x,y) = \frac{2y^4x}{1+x^2y^4}$, $\partial_y f(x,y) = \frac{4y^3x^2}{1+x^2y^4}$, $\nabla f(x,y) = \frac{2y^3x}{1+x^2y^4}\binom{y}{2x}$.

H8.2. Höhere partielle Ableitungen

Berechnen Sie für $f(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$, $x > 0$, alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen. HINWEIS: $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

LÖSUNG:

Mit der Kettenregel ist
$\partial_x f(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2}) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ und $\partial_y f(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(\frac{1}{x}) = \frac{x}{x^2+y^2}$.
$\partial_x\partial_x f(x,y) = \frac{y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$,
$\partial_y\partial_x f(x,y) = \frac{-(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$,
$\partial_x\partial_y f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$,
$\partial_y\partial_y f(x,y) = \frac{-x(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

H8.3. Lösung einer partiellen Differentialgleichung

Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x,y) = \ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ für $x, y > 0$ die partielle Differentialgleichung $x\partial_x g(x,y) + y\partial_y g(x,y) = \frac{1}{2}$ erfüllt.

LÖSUNG:

$\partial_x g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\partial_y g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\frac{1}{2\sqrt{y}}$,
also ist $x\partial_x g(x,y) + y\partial_y g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\frac{1}{2}\sqrt{y} = \frac{1}{2}$, wie behauptet.