TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

DR. M. PRÄHOFER

Grundzüge der Höheren Mathematik 2
für Lehramt an Beruflichen Schulen
MA9952

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9952_2017S

Sommersemester 2017
Lösungsblatt 7
(27.6.2017)

Präsenzaufgaben

P7.1. Darstellende Matrix einer linearen Abbildung

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear mit $F(\vec{e}_1) = \binom{3}{1}$ und $F(\vec{e}_2) = \binom{-1}{2}$. Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $F(\vec{x}) = A\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

LÖSUNG:

$A\vec{x} = F(\vec{x}) = F(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1F(\vec{e}_1) + x_2F(\vec{e}_2) = x_1\binom{3}{1} + x_2\binom{-1}{2} = \binom{3x_1-1\cdot x_2}{1\cdot x_2+2x_1}$
$= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\binom{x_1}{x_2}$, Also $A = \begin{pmatrix} F(\vec{e}_1) & F(\vec{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

P7.2. Spiegelung an der Antidiagonalen

Geben Sie diejenige lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ an, die einer Spiegelung an der Antidiagonalen $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 = -x_2\}$ entspricht.

LÖSUNG:

Für diese lineare Abbildung F muss gelten: $F(\vec{e}_1) = -\vec{e}_2 = \binom{0}{-1}$ und $F(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 = \binom{-1}{0}$. wird die Spiegelung an der Antidiagonalen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dargestellt, $F(\vec{x}) = A\vec{x}$.

P7.3. Eine orthogonale Matrix

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $|F(\vec{e}_1)| = |F(\vec{e}_2)| = 1$, $F(\vec{e}_1) \cdot F(\vec{e}_2) = 0$ und $\det(F(\vec{e}_1), F(\vec{e}_2)) > 0$. Dann gilt für die darstellende Matrix A von F: $A^{\mathrm{T}}A = E$ und F ist eine Drehung.

LÖSUNG:

Sei $F(\vec{e_1}) = \vec{v}$ und $F(\vec{e_2}) = \vec{w}$. Dann ist die darstellende Matrix von F, $A = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ mit $v_1^2 + v_2^2 = 1 = w_1^2 + w_2^2$, $v_1w_1 + v_2w_2 = 0$ und $v_1w_2 - v_2w_1 > 0$. Damit erhalten wir $A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^2+v_2^2 & v_1w_1+v_2w_2 \\ v_1w_1+v_2w_2 & w_1^2+w_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$. Zum Vektor $v = (v_1, v_2)$ gibt es genau einen Winkel $\phi \in (-\pi, \pi]$, so dass $v_1 = \cos\phi$ und $v_2 = \sin\phi$ ist. Wegen $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$ und $|vecw| = 1$ gilt $w_1v_1 = -w_2v_2$, also entweder $w_1 = v_2$ und $w_2 = -v_1$ oder $w_1 = -v_2$ und $w_2 = v_1$. Wegen der Determinantenbedingung kann nur letzteres zutreffen, denn dann ist $v_1w_2 - v_2w_1 = v_1^2 + v_2^2 > 0$. Es gilt also $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$, was bekannterweise eine Drehung um den Winkel ϕ gegen den Uhrzeigersinn ist.

Hausaufgaben

H7.1. Darstellende Matrix einer linearen Abbildung

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear mit $F(\vec{e}_1) = (1, 2, 3)$, $F(\vec{e}_2) = (-2, 0, 1)$ und $F(\vec{e}_3) = (4, -1, 3)$. Bestimmen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$, so dass $F(\vec{x}) = A\vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

LÖSUNG:

Die darstellende Matrix von F ist $A = \begin{pmatrix} F(\vec{e}_1) & F(\vec{e}_2) & F(\vec{e}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, denn

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= F(\vec{x}) = F(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1F(\vec{e}_1) + x_2F(\vec{e}_2) + x_3F(\vec{e}_3) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 0 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 \\ 3x_1 + 1 \cdot x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

H7.2. Spiegelung an einer beliebigen Achse

Sei $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ mit $|\vec{n}| = 1$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ der Spiegelung an der Geraden $\{\lambda\vec{n} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\vec{x}) = 2(\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{x}$ und überprüfen Sie, dass $A^2 = E$ gilt.

LÖSUNG:

$A\vec{x} = f(\vec{x}) = 2(x_1n_1 + x_2n_2)\binom{n_1}{n_2} - \binom{x_1}{n_2} = \binom{2(x_1n_1+x_2n_2)n_1-x_1}{2(x_1n_1+x_2n_2)n_2-x_2} = \binom{(2n_1^2-1)x_1+2n_2n_1x_2}{2n_1n_2x_1+(n_2^2-1)x_2}$
$= \begin{pmatrix} n_1^2-n_2^2 & 2n_1n_2 \\ 2n_1n_2 & n_2^2-n_1^2 \end{pmatrix}\binom{x_1}{x_2}$. Mit $A = \begin{pmatrix} n_1^2-n_2^2 & 2n_1n_2 \\ 2n_1n_2 & n_2^2-n_1^2 \end{pmatrix}$ erhält man sofort
$A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} n_1^2-n_2^2 & 2n_1n_2 \\ 2n_1n_2 & n_2^2-n_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1^2-n_2^2 & 2n_1n_2 \\ 2n_1n_2 & n_2^2-n_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^4-2n_1^2n_2^2+n_2^4+4n_1^2n_2^2 & 0 \\ 0 & n_2^4-2n_1^2n_2^2+n_4^4+4n_1^2n_2^2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} n_1^4+2n_1^2n_2^2+n_2^4 & 0 \\ 0 & n_2^4+2n_1^2n_2^2+n_4^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n_1^2+n_2^2)^2 & 0 \\ 0 & (n_1^2+n_2^2)^2 \end{pmatrix} = E.$

H7.3. Eine orthogonale Matrix

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $F(\vec{e}_j) = \vec{v}_j$, $j = 1, 2, 3$, wobei $|\vec{v}_j| = 1$ und $\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = 0$ für $j \neq k$, $j, k = 1, 2, 3$. Zeigen Sie, dass für die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ von F gilt: $A^{\mathrm{T}}A = E$.

LÖSUNG:

Die darstellende Matrix von F ist $A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{T}}A &= \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\mathrm{T}} \\ \vec{v}_2^{\mathrm{T}} \\ \vec{v}_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{\mathrm{T}}\vec{v}_1 & \vec{v}_1^{\mathrm{T}}\vec{v}_2 & \vec{v}_1^{\mathrm{T}}\vec{v}_3 \\ \vec{v}_2^{\mathrm{T}}\vec{v}_1 & \vec{v}_2^{\mathrm{T}}\vec{v}_2 & \vec{v}_2^{\mathrm{T}}\vec{v}_3 \\ \vec{v}_3^{\mathrm{T}}\vec{v}_1 & \vec{v}_3^{\mathrm{T}}\vec{v}_2 & \vec{v}_3^{\mathrm{T}}\vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 \\ \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$