TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Grundzüge der Höheren Mathematik 2 für Lehramt an Beruflichen Schulen
MA9952

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9952_2017S

Sommersemester 2017
Lösungsblatt 6
(20.6.2017)

Präsenzaufgaben

P6.1. Invertieren von Matrizen

Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Inversen von $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Zur Berechnung von A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 & -a^2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a & 1 \end{array}\right),$$

also ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$.

Zur Berechnung von B^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

also ist $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Das Inverse von B hätte man mit dem Ergebnis für a auch wie folgt erhalten können: $B^{-1} = \big((A^{-1})^{\mathrm{T}}\big)^{-1} = \big((A^{\mathrm{T}})^{-1}\big)^{-1} = A^{\mathrm{T}}$.

P6.2. Das Inverse einer 2×2-Matrix

Zeigen Sie, dass für den Fall $ad - bc \neq 0$ die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar ist und in diesem Fall $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ gilt.

Lösung:

Wir überprüfen das Ergebnis durch Ausrechnen für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)E_2.$$

Dividieren auf beiden Seiten durch $\det(A) = ad - bc$ ergibt $A\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = E_2 = AA^{-1}$. Multiplizieren von links mit A^{-1} ergibt $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

P6.3. Die Determinante einer Matrix

Berechnen Sie

(a) $\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, (c) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, (d) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

LÖSUNG:

(a) $\det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad = 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) = 11.$

(b) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = 0.$

(c) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$

(d) Durch elementare Zeilenumformungen erhält man ohne die Determinante zu ändern:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & (-1) \end{pmatrix}$$

$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$

Hausaufgaben

H6.1. Invertieren von Matrizen

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$, $(\frac{1}{4}A)^{-1}$.

(b) Ist $A + B$ invertierbar?

LÖSUNG:

(a)

$$(A|E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & 2 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (E|A^{-1}),$$

$$(B|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) = (E|B^{-1}),$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\tfrac{1}{4}A)^{-1} = 4A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$,

$\det(A+B) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 6 - 12 + 6 = 0.$

Da die Determinante gleich 0 ist, ist $A + B$ nicht invertierbar.

H6.2. Die Determinante einer Matrix

Berechnen Sie

(a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, (b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, (c) $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 1.$

(b) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -21 - (5 - 14) + 3 = -9.$

(c) $\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$

(d) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 7 & 26 & 63 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & 42 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12.$