TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Grundzüge der Höheren Mathematik 2 für Lehramt an Beruflichen Schulen MA9952

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9952_2017S

Sommersemester 2017
Lösungsblatt 5
(13.6.2017)

Präsenzaufgaben

P5.1. Lineares Gleichungssystem

Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

an und lösen Sie es mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

Lösung:

Für dieses lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lautet die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 2 & 4 & -3 & | & 1 \\ 3 & 6 & -5 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 2 & -7 & | & -17 \\ 0 & 3 & -11 & | & -27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & | & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & | & -27 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & | & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & | & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & | & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{4}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, Ax = b\} = \{(1, 2, 3)\}$.

P5.2. Lineares Gleichungssystem

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -\beta \\ 1 \end{pmatrix}$. Für welche Werte von α und β besitzt dieses lineare Gleichungssystem (i) genau eine Lösung, (ii) keine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen? Geben Sie im letzten Fall alle Lösungen an.

Lösung:

Das Gaußsche Eliminationsverfahren liefert

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & -\beta \\ 1 & \alpha & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & -\beta \\ 0 & \alpha - 2 & | & 1 + \beta \end{pmatrix}$$

(i) Ist $\alpha \neq 2$, dann gibt es genau eine Lösung mit $x_2 = \frac{1+\beta}{\alpha-2}$
(ii) Ist $\alpha = 2$ und $\beta + 1 \neq 0$, also $\beta \neq -1$, dann gibt es keine Lösung, da die Gleichung der letzten Zeile $0 = 1 + \beta$ nicht erfüllt werden kann.
(iii) Für $\alpha = 2$ und $\beta = -1$ verschwindet die letzte Zeile. Es bleibt die Gleichung $x_1 + 2x_2 = -\beta$. x_2 kann beliebig festgelegt werden, $x_2 = s \in \mathbb{R}$. $x_1 = -\beta - 2x_2$. Somit ist $\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, Ax = b\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\beta - 2s \\ s \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$.

P5.3. Matrixmultiplikation

Berechnen Sie jeweils das Matrixprodukt von

(a) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

(b) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit sich selbst, immer wieder.

LÖSUNG:

(a) $ab = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{1\times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{3\times 1}} = \underbrace{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3}_{\in\mathbb{R}^{1\times 1}} = 14.$

(b) $ab = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{3\times 1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{1\times 3}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{3\times 3}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$

(c)

$$
\begin{aligned}
AB &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{2\times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{3\times 4}} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 1\cdot 4+2\cdot 0+4\cdot 2 & 1\cdot 1+2\cdot(-1)+4\cdot 7 & 1\cdot 4+2\cdot 3+4\cdot 5 & 1\cdot 3+2\cdot 1+4\cdot 2 \\ 2\cdot 4+6\cdot 0+0\cdot 2 & 2\cdot 1+6\cdot(-1)+0\cdot 7 & 2\cdot 4+6\cdot 3+0\cdot 5 & 2\cdot 3+6\cdot 1+0\cdot 2 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^{2\times 4}} \\
&= \begin{pmatrix} 12 & 26 & 30 & 11 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

.

(d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wegen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tauchen bei weiteren Multiplikationen keine neuen Matrizen mehr auf.

Hausaufgaben

H5.1. Lineares Gleichungssystem

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \beta \\ 16 \end{pmatrix}$.

Für welche Werte von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt dieses lineare Gleichungssystem (i) genau eine Lösung, (ii) keine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen? Geben Sie im letzten Fall alle Lösungen an.

LÖSUNG:

Das Gaußsche Eliminationsverfahren liefert

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & | & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 & | & \beta \\ -1 & 0 & 1 & \alpha & | & 16 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & \beta - 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 & | & 3\beta + 6 \end{pmatrix}$$

(i) Ist $\alpha \neq 1$, dann gibt es genau eine Lösung mit $x_4 = \frac{3\beta+6}{\alpha-1}$
(ii) Ist $\alpha = 1$ und $3\beta + 6 \neq 0$, also $\beta \neq -2$, dann gibt es keine Lösung, da die Gleichung der letzten Zeile $0 = 3\beta + 6$ nicht erfüllt werden kann.
(iii) Für $\alpha = 1$ und $\beta = -2$ verschwindet die letzte Zeile. Es sind die Lösungen zu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ zu bestimmen: Von unten nach oben ergibt sich: $x_4 = s \in \mathbb{R}$, $x_3 = -2 - s$, $x_2 = 2 - 3s - 3(-2 - s) = 8$, $x_1 = s + (-2 - s) - 2 \cdot 8 = -18$. Somit ist $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = b\} = \left\{ \begin{pmatrix} -18 \\ 8 \\ -2 - s \\ s \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$.

H5.2. Matrixmultiplikation

Berechnen Sie jeweils

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$.

LÖSUNG:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 41 \\ 41 & 53 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 29 \\ 29 & 74 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x + y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu - yv & -(xv + yu) \\ xv + yu & xu - yv \end{pmatrix}$.