TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Grundzüge der Höheren Mathematik 2 für Lehramt an Beruflichen Schulen MA9952

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9952_2017S

Sommersemester 2017
Lösungsblatt 4
(30.5.2017)

Präsenzaufgaben

P4.1. Lineare Gleichungen

Zwei Sportler A und B die mit konstanter Geschwindigkeit v und w (in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$) laufen, bestreiten ein Rennen. A lässt B einen Vorsprung von d Metern. Nach welcher Zeit (in Sekunden) treffen sich die beiden, wenn

(a) $v = 10$, $w = 8$, $d = 30$, (b) $v = 8$, $w = 8$, $d = 0$, (c) $v = 8$, $w = 8$, $d = 10$?

Lösung:

Die Gleichung für dieses Problem lautet, wobei t die gesuchte Variable, oder Unbekannte ist: $x = vt = wt + d$, wobei die Gesamtstrecke x gar nicht gefragt ist. Die Gleichung kann geschrieben werden als:

$$(v - w)t - d = 0.$$

Für $v \neq w$ ist die Lösung eindeutig, nämlich $t = \frac{d}{v-w}$. Für $v = w$ gibt es entweder keine Lösung falls $d \neq 0$ ist, da sich so die beiden Läufer nie treffen, oder unendlich viele Lösungen, falls zusätzlich noch $d = 0$ ist, dann laufen beide die ganze Zeit Hand in Hand.

(a) Für $v = 10$, $w = 8$, $d = 30$ treffen sich A und B nach $t = \frac{d}{v-w} = 15$ Sekunden.

(b) Für $v = 8$, $w = 8$, $d = 0$ treffen sie sich zu jeder Zeit $t \in \mathbb{R}$

(c) Für $v = 8$, $w = 8$, $d = 10$ treffen sie sich nie.

P4.2. Spezielle lineare Gleichungssysteme

Geben Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ an mit

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, (e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a)

Hausaufgaben

H4.1. Spezielle lineare Gleichungssysteme

Geben Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ an mit

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$

LÖSUNG:

(a) Das Gleichungssystem lautet explizit $1 \cdot x_1 = 2$, $5x_2 = 3$, $0 \cdot x_3 = 0$, $0 \cdot x_4 = 0$. Die Menge aller Lösungen ist gegeben durch $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{3}{5}$, $x_3 \in \mathbb{R}$, $x_4 \in \mathbb{R}$.

(b) Das Gleichungssystem lautet explizit

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad 3x_2 + \quad x_3 + \quad 3x_4 &= 4 \\ x_2 + \quad 2x_3 + \quad 4x_4 &= 3 \\ 2x_3 + \quad x_4 &= 8 \\ 2x_4 &= 12 \end{aligned}$$

und ergibt der Reihe nach von unten nach oben jeweils nach der ersten Variablen aufgelöst
$x_4 = 6$, $x_3 = \frac{1}{2}(8 - x_4) = 1$, $x_2 = 3 - 2x_3 - 4x_4 = -23$, $x_1 = \frac{1}{2}(4 - 3x_2 - x_3 - 3x_4) = 27$.

H4.2. Lineare Gleichungssysteme

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

(a) $\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & = & 3 \\ -9x_1 & + & 15x_2 & = & -6 \end{array}$

(b) $\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & -12 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & - & 5x_4 & = & -21 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 10 \\ -6x_1 & + & 6x_2 & + & 13x_3 & + & 10x_4 & = & -22 \end{array}$

LÖSUNG:

(a)