TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Grundzüge der Höheren Mathematik 2 für Lehramt an Beruflichen Schulen MA9952

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9952_2017S

Sommersemester 2017
Lösungsblatt 3
(16.5.2017)

Präsenzaufgaben

P3.1. Ableitungsregeln für Kurven

Gegeben seien die beiden Kurven $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ t^2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$. Berechnen Sie direkt und mit Hilfe der Produktregel die Ableitung von $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$.

Lösung:

- *direkt:*

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b}(t) &= t\cos(2t) + t^3\sin(2t) + t^2\mathrm{e}^{-t}, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} \cdot \vec{b}(t) &= \cos(2t) - 2t\sin(2t) + 3t^2\sin(2t) + 2t^3\cos(2t) + 2t\mathrm{e}^{-t} - t^2\mathrm{e}^{-t} \\
&= (2t^3+1)\cos(2t) + (3t^2-2t)\sin(2t) + (2t-t^2)\mathrm{e}^{-t}, \\
\vec{a} \times \vec{b}(t) &= \begin{pmatrix} \sin(2t)\mathrm{e}^{-t} - t^5 \\ t^3 - \cos(2t)\mathrm{e}^{-t} \\ \cos(2t)t^3 - \sin(2t)t \end{pmatrix}, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} \times \vec{b}(t) &= \begin{pmatrix} 2\cos(2t)\mathrm{e}^{-t} - \sin(2t)\mathrm{e}^{-t} - 5t^4 \\ 3t^2 + 2\sin(2t)\mathrm{e}^{-t} + \cos(2t)\mathrm{e}^{-t} \\ -2\sin(2t)t^3 + 3\cos(2t)t^2 - 2\cos(2t)t - \sin(2t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}(2\cos(2t) - \sin(2t)) - 5t^4 \\ \mathrm{e}^{-t}(2\sin(2t) + \cos(2t)) + 3t^2 \\ \cos(2t)(3t^2-2t) - \sin(2t)(2t^3+1) \end{pmatrix} =: (*).
\end{aligned}$$

- *mit Produktregel:*

$$\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ 2\cos(2t) \\ 2t \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{b}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} \cdot \vec{b}(t) &= \dot{\vec{a}}(t) \cdot \vec{b}(t) + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}}(t) \\
&= -2\sin(2t)t + 2\cos(2t)t^3 + 2t\mathrm{e}^{-t} + \cos(2t) + 3\sin(2t)t^2 - t^2\mathrm{e}^{-t} \\
&= (2t^3+1)\cos(2t) + (3t^2-2t)\sin(2t) + (2t-t^2)\mathrm{e}^{-t}, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a} \times \vec{b}(t) &= \dot{\vec{a}}(t) \times \vec{b}(t) + \vec{a} \times \dot{\vec{b}}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ 2\cos(2t) \\ 2t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ t^3 \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ t^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cos(2t)\mathrm{e}^{-t} - 2t^4 \\ 2t^2 + 2\sin(2t)\mathrm{e}^{-t} \\ -2\sin(2t)t^3 + 2\cos(2t)t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(2t)\mathrm{e}^{-t} - 3t^4 \\ t^2 + \cos(2t)\mathrm{e}^{-t} \\ 3\cos(2t)t^2 - \sin(2t) \end{pmatrix} = (*).
\end{aligned}$$

P3.2. Die Bogenlänge der Schraubenlinie

Berechnen Sie die Bogenlänge der Schraubenlinie $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ \alpha t \end{pmatrix}$, $t \in [0, T]$, für $r, \omega, \alpha, T > 0$.

LÖSUNG:

$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ r\omega\cos(\omega t) \\ \alpha \end{pmatrix}$, $|\dot{\vec{x}}(t)| = \sqrt{r^2\omega^2\sin^2(\omega t) + r^2\omega^2\cos^2(\omega t) + \alpha^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + \alpha^2}$.

Somit ist die Bogenlänge

$$L = \int_0^T |\dot{\vec{x}}(t)|\mathrm{d}t = \int_0^T \sqrt{r^2\omega^2 + \alpha^2}\mathrm{d}t = T\sqrt{r^2\omega^2 + \alpha^2}.$$

P3.3. Die Bogenlänge der Zykloide

Berechnen Sie die Bogenlänge der Zykloiden $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r(t - \sin t) \\ r(1 - \cos t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, für $r > 0$.

HINWEIS: Beweisen Sie zunächst, dass $\frac{1-\cos t}{2} = \sin^2(\frac{t}{2})$ gilt.

LÖSUNG:

Zunächst zum Hinweis: Auf Grund des Additionstheorems $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ folgt $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$, bzw. $\frac{1-\cos(2x)}{2} = \sin^2(x)$, was mit der Ersetzung $t = 2x$ die Gleichung im Hinweis ergibt.

$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} r(1 - \cos t) \\ r\sin t \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} |\dot{\vec{x}}(t)| &= \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2\sin^2 t} = r\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = r\sqrt{2 - 2\cos t} \\ &= 2r\sqrt{\tfrac{1-\cos t}{2}} = 2r\sqrt{\sin^2(\tfrac{t}{2})} = 2r|\sin(\tfrac{t}{2})|. \end{aligned}$$

Somit ist die Bogenlänge (da $\sin x \geq 0$ für $x \in [0, \pi]$)

$$L = \int_0^{2\pi} |\dot{\vec{x}}(t)|\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 4r\sin(\tfrac{t}{2})\mathrm{d}t = 4r\big[-\cos(\tfrac{t}{2})\big]_0^{2\pi} = 4r(-(-1) - (-1)) = 8r.$$

Hausaufgaben

H3.1. Ableitungsregeln für Kurven

Gegeben seien die beiden Kurven $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2t \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$ und $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 1 - t \\ \sin(t) \\ e^t \end{pmatrix}$ und $\lambda(t) = \mathrm{e}^{-t}$.

Berechnen Sie direkt und mit Hilfe der Produktregel die Ableitung von $\lambda\vec{a}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$.

LÖSUNG:

- *direkt:*

$$\lambda\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}\cos t \\ 2t\mathrm{e}^{-t} \\ 2\mathrm{e}^{-t}\sin t \end{pmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-t}\cos t - 2\mathrm{e}^{-t}\sin t \\ 2\mathrm{e}^{-t} - 2t\mathrm{e}^{-t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}\sin t + 2\mathrm{e}^{-t}\cos t \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b}(t) &= 2\cos(t)(1-t) + 2t\sin(t) + 2\sin(t)\mathrm{e}^t = 2\cos(t)(1-t) + 2\sin(t)(t+\mathrm{e}^t),\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}\cdot\vec{b}(t) &= -2\sin(t)(1-t) - 2\cos(t) + 2\cos(t)(t+\mathrm{e}^t) + 2\sin(t)(1+\mathrm{e}^t)\\
&= 2\sin(t)(t+\mathrm{e}^t) + 2\cos(t)(t-1+\mathrm{e}^t),\\
\vec{a}\times\vec{b}(t) &= \begin{pmatrix} 2t\mathrm{e}^t - 2\sin^2(t) \\ 2\sin(t)(1-t) - 2\cos(t)\mathrm{e}^t \\ 2\cos(t)\sin(t) - 2t(1-t) \end{pmatrix},\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}\times\vec{b}(t) &= \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t + 2t\mathrm{e}^t - 4\sin(t)\cos(t) \\ 2\cos(t)(1-t) - 2\sin(t) + 2\sin(t)\mathrm{e}^t - 2\cos(t)\mathrm{e}^t \\ -2\sin^2(t) + 2\cos^2(t) - 2 + 4t \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t(1+t) - 4\sin(t)\cos(t) \\ 2\cos(t)(1-t-\mathrm{e}^t) + 2\sin(t)(\mathrm{e}^t-1) \\ 4t - 4\sin^2(t) \end{pmatrix} =: (*).
\end{aligned}$$

- *mit Produktregel:*

$$\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2 \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{b}}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ \cos(t) \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix},$$

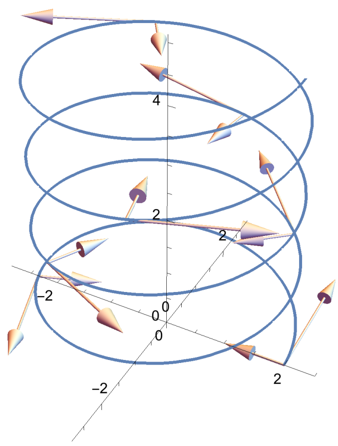
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}\cdot\vec{b}(t) &= \dot{\vec{a}}(t)\cdot\vec{b}(t) + \vec{a}\cdot\dot{\vec{b}}(t)\\
&= -2\sin(t)(1-t) + 2\sin(t) + 2\cos(t)\mathrm{e}^t - 2\cos(t) + 2t\cos(t) + 2\sin(t)\mathrm{e}^t\\
&= 2\cos(t)(\mathrm{e}^t + t - 1) + 2\sin(t)(\mathrm{e}^t + t),\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}\times\vec{b}(t) &= \dot{\vec{a}}(t)\times\vec{b}(t) + \vec{a}\times\dot{\vec{b}}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2 \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-t \\ \sin(t) \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2t \\ 2\sin(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ \cos(t) \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t - 2\cos(t)\sin(t) \\ 2\cos(t)(1-t) + 2\sin(t)\mathrm{e}^t \\ -2\sin^2(t) - 2 + 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t\mathrm{e}^t - 2\sin(t)(\cos(t) \\ -2\sin(t) - 2\cos(t)\mathrm{e}^t \\ 2\cos^2(t) + 2t \end{pmatrix} = (*).
\end{aligned}$$

H3.2. Die Geometrie der Schraubenlinie

Berechnen und veranschaulichen Sie den Geschwindigkeitsvekor und den Beschleunigungsvektor entlang der Schraubenlinie $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ \alpha t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, für $r, \omega, \alpha > 0$.

LÖSUNG:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega\sin(\omega t) \\ r\omega\cos(\omega t) \\ \alpha \end{pmatrix}, \; \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos(\omega t) \\ -r\omega^2\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$



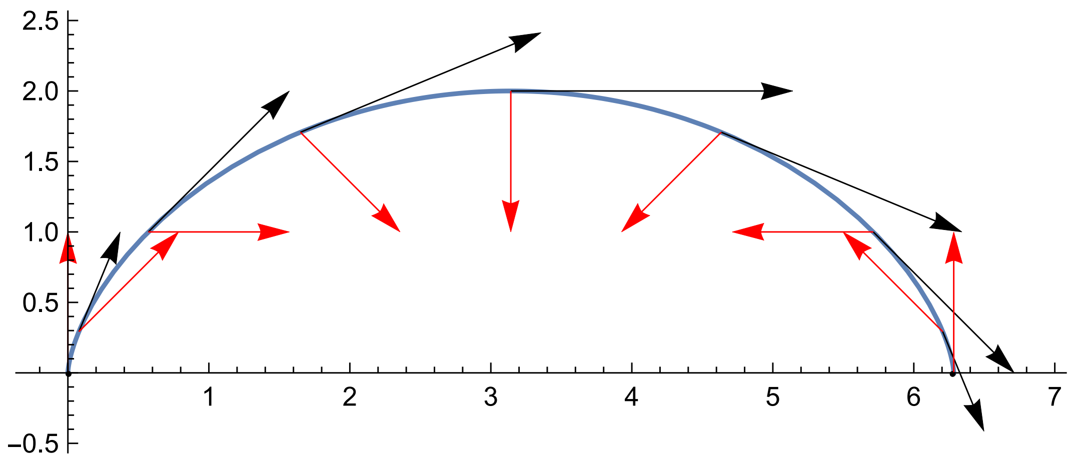
Die Schraubenlinie mit einigen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren.

H3.3. Die Geometrie der Zykloide

Skizzieren Sie die Zykloidenkurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r(t - \sin t) \\ r(1 - \cos t) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$, für $r > 0$. Berechnen und veranschaulichen Sie ihre Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren. Recherchieren Sie die Interpretation als Bahnkurve eines Fahrradventils.

Lösung:

$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} r(1 - \cos t) \\ r \sin t \end{pmatrix}$, $\ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix}$.



Die Zykloide mit einigen Geschwindigkeits- (schwarz) und Beschleunigungsvektoren (rot).