TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Grundzüge der Höheren Mathematik 2 für Lehramt an Beruflichen Schulen MA9952

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9952_2017S

Sommersemester 2017
Lösungsblatt 2
(9.5.2017)

Präsenzaufgaben

P2.1. Kosinussatz (indirekt Entfernungen messen)

Der Abstand zweier Berggipfel A und B soll bestimmt werden. Der Abstand a von C nach B und der Abstand b von C nach A ist bekannt (jeweils Luftlinie). Vom Beobachterstandpunkt C aus gesehen ist der Winkel zwischen A und B gleich ϕ. Berechnen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung den Abstand c zwischen A und B.

Lösung:

Sei $\vec{a}$ der Vektor von C nach B und $\vec{b}$ der Vektor von C nach A. Dann ist

$$c^2 = |\vec{b}-\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{a} = b^2 + a^2 - 2ab\cos\phi,$$

d.h., $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\phi}$.

P2.2. Dreiecksfläche

Skizzieren Sie das Dreieck mit den Ecken $A = (2,1)$, $B = (5,3)$, $C = (0,5)$, schätzen Sie seine Fläche und berechnen sie dann exakt.

Lösung:

Aus der Zeichnung kann man die Fläche nur sehr grob schätzen. Setzen wir $\vec{c} = B-A = \binom{3}{2}$ und $\vec{b} = C-A = \binom{-2}{4}$, so erhält man für die Fläche des Dreiecks

$$\text{Fläche}(ABC) = \tfrac{1}{2}|b_1c_2 - b_2c_1| = \tfrac{1}{2}|(-2)\cdot 2 - 4\cdot 3| = 8.$$

P2.3. Vektor- und Spatprodukt

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$, $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}$, $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$.

Lösung:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot1-5\cdot3\\5\cdot(-1)-2\cdot1\\2\cdot3-1\cdot(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\-7\\7\end{pmatrix}, \vec{b}\times\vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\5\\-17\end{pmatrix},$$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{0}-\vec{b}\times\vec{c} = \begin{pmatrix}-14\\-7\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\5\\-17\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\-12\\24\end{pmatrix}.$$

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b}) = -\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\\-17\end{pmatrix} = 4-5+85 = 84.$$

P2.4. Lineare Unabhängigkeit

Zeigen Sie explizit: Sind $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ mit $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \neq 0$, dann sind die drei Vektoren linear unabhängig.

LÖSUNG:

Wir zeigen die Umkehrung: Sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig, dann gilt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.
Wenn $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig, dann gibt es $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ ist, wobei nicht alle drei α, β, γ gleich 0 sind.
Nehmen wir zunächst an, dass $\alpha \neq 0$ ist. Dann ist $\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{c}$, und damit

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0,$$

da $\vec{b}$ und $\vec{c}$ immer senkrecht auf $\vec{b} \times \vec{c}$ stehen.
Ist $\beta \neq 0$, dann ist $\vec{b} = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{a} - \frac{\gamma}{\beta}\vec{c}$ und es gilt

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\frac{\alpha}{\beta}\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) - \frac{\gamma}{\beta}\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{c}) = 0,$$

denn $\vec{a}$ steht senkrecht auf $\vec{a} \times \vec{c}$ und $\vec{c} \times \vec{c} = \vec{0}$. Der Fall $\gamma \neq 0$ geht genauso.

Hausaufgaben

H2.1. Vektor- und Skalarprodukt

Zeigen Sie durch explizites Ausrechnen, dass für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$.

LÖSUNG:

Durch Einsetzen der Definitionen und Ausmultiplizieren erhält man

$$\begin{aligned}
&|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 \\
&\quad = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&\quad = a_2^2b_3^2 + a_1^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_2b_2a_3b_3 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_1b_1a_2b_2 \\
&\qquad + a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + 2a_1b_1a_3b_3 + 2a_2b_2a_3b_3 \\
&\quad = a_1^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\
&\quad = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2.
\end{aligned}$$

H2.2. Spatprodukt

Seien $\vec{a} = \big(1, 2, 2\big)$, $\vec{b} = \big(2, 1, 2\big)$, $\vec{c} = \big(2, 2, 1\big)$. Geben Sie die Koordinaten der Ecken des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds an, berechnen Sie dann seinen Oberflächeninhalt und sein Volumen.

LÖSUNG:

Die 8 Ecken des Spates haben die Koordinaten

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Die Seitenflächen in Form von Parallelogrammen sind alle kongruent. Ihre Fläche ist jeweils

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{17} = |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{c} \times \vec{a}|.$$

Die Gesamtoverfläche des Parallelepipeds aus 6 Parallelogrammen ist also $6\sqrt{17} \approx 24.74$.
Das Volumen errechnet sich als $|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = 5.$

H2.3. Lineare Abhängigkeit

Für welchen Wert von $\alpha \in \mathbb{R}$ liegen die drei Vektoren $(2, 1, 0)$, $(\alpha, -1, 1)$, $(1, 3, -1)$ in einer Ebene?

LÖSUNG:

Die drei Vektoren liegen genau dann in einer Ebene, wenn ihr Spatprodukt gleich 0 ist:

$$0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \alpha - 3,$$

woraus sofort ersichtlich ist, das einzig für den Wert $\alpha = 3$ die drei Vektoren in einer Ebene liegen.