....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Grundzüge der Höheren Mathematik 1 für Lehramt an Berufsschulen (MA9951)

Dr. M. Prähofer

17. Februar 2017, 13:30 – 14:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **6** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **60** min

Hilfsmittel: Ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung

1. **Tautologien** **[5 Punkte]**
Entscheiden Sie mit einer Wahrheitstafel, ob $\neg A \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow \neg B)$ eine Tautologie ist.
LÖSUNG:

Die Wahrheitstafel lautet:

A	B	$\neg A$	$B \Rightarrow A$	$\neg B$	$(B \Rightarrow A) \Rightarrow \neg B$	$\neg A \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow \neg B)$
f	f	w	w	w	w	w
f	w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	w

Die fragliche Formel in der letzten Spalte ist also in jedem Fall wahr, $\neg A \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow \neg B)$ ist also eine Tautologie.

2. **Vollständige Induktion** **[6 Punkte]**
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die Gültigkeit der Formel

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = n^2 + n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
LÖSUNG:

Induktionsanfang ($n = 1$): Es ist $\sum\limits_{k=1}^{1} 2k = 2 \cdot 1 = 2 = 1^2 + 1$.
Induktionsschritt ($n \mapsto n + 1$): Unter der Induktionsvoraussetzung, dass die Formel für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt berechnen wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k = \sum_{k=1}^{n} 2k + 2(n+1) \overset{\text{I.V.}}{=} n^2 + n + 2(n+1) = n^2 + 3n + 2.$$

Auf der anderen Seite ist ebenfalls $(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + 3n + 2$, womit der Induktionsschritt und, nach dem Prinzip der Vollständigen Induktion, die gesamte Behauptung bewiesen ist.

3. **Grenzwerte** **[7 Punkte]**
Bestimmen Sie, falls definiert, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 - n^3}{(2n+1)(n^2+2)}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{1 - \frac{n}{n+1}}$ (HINWEIS: Dritte binomische Formel).

LÖSUNG:

(a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2 - n^3}{(2n+1)(n^2+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^3} - 1}{(2 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n^2})} = \frac{2 \cdot 0 - 1}{(2+0)(1+0)} = -\frac{1}{2}.$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{1 - \frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)}{\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{2}.$$

4. **Ableitungen** **[13 Punkte]**

(a) Berechnen Sie nachvollziehbar die erste und zweite Ableitung von $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.
(Ergebnis: $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, $f''(x) = \dfrac{-3 + 2\ln x}{x^3}$)

(b) Finden Sie einen kritischen Punkt von f und begründen Sie ob dieser ein lokales Maximum oder Minimum von f ist.

(c) Wie lautet das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f im Entwicklungspunkt 1?

LÖSUNG:

(a) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$,

$$f''(x) = \frac{(0 - \frac{1}{x})x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}.$$

(b) f hat einen kritischen Punkt, wenn $f'(x) = 0$ ist, d.h., genau dann, wenn $1 - \ln x = 0$, bzw., $\ln x = 1$ ist. Dies ist aber genau dann erfüllt, wenn $x = \mathrm{e}$ ist.
Wegen $f''(\mathrm{e}) = \frac{-3+2\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}^3} = -\frac{3}{\mathrm{e}^3} < 0$ ist der kritische Punkt von f bei $x = \mathrm{e}$ ein lokales Maximum.

(c) Wegen $f(1) = \frac{\ln(1)}{1} = 0$, $f'(1) = \frac{1-\ln(1)}{1^2} = 1$, $f''(1) = \frac{-3+2\ln(1)}{1^3} = -3$ lautet das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f im Entwicklungspunkt 1

$$T_{f,1,2}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = 0 + (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

5. **Integrale** **[10 Punkte]**

Berechnen Sie die folgenden Intetgrale:

(a) $\displaystyle\int_0^2 t^{3/2}\mathrm{d}t$, (b) $\displaystyle\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ (mit Hilfe partieller Integration).

LÖSUNG:

(a) $$\int_0^2 t^{3/2}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^2 = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{0^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{5}.$$

(b) $$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \underbrace{x}_{=f(x)} \underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{=g'(x)} \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left(\Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^b - \int_0^b 1 \cdot (-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-b\mathrm{e}^{-b} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^b\right) = \lim_{b\to\infty} \big(-b\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-b} + 1\big) = 1,$$

da $\lim\limits_{b\to\infty} \mathrm{e}^{-b} = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^b} = 0$ und $\lim\limits_{b\to\infty} b\mathrm{e}^{-b} = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{b}{\mathrm{e}^b} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{b\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^b} = 0$.

6. **Reihen** **[8 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2^n}$.

(b) Begründen Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right)^n$ konvergent ist.

LÖSUNG:

(a) Dies ist die Differenz zweier geometrischer Reihen,
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

(b) Das Wurzelkriterium mit $a_n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right)^n$ ergibt wegen
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right)^n\right|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{3} < 1$, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right)^n$ (sogar absolut) konvergent ist.