TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Grundzüge der Höheren Mathematik 1 für Lehramt an Beruflichen Schulen MA9951

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9951_2016W

Wintersemester 2016/17
Lösungsblatt 13
(02.02.2017)

Hausaufgaben

H13.1. Tautologien

Entscheiden Sie mit einer Wahrheitstafel, ob $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ eine Tautologie ist.

Lösung:

Die Wahrheitstafel lautet:

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$	$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$
f	f	w	f	w
f	w	w	f	w
w	f	f	w	w
w	w	w	w	w

Die fragliche Formel in der letzten Spalte ist also in jedem Fall wahr, $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ ist also eine Tautologie.

H13.2. Funktionen

Entscheiden Sie ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind:

Funktion	injektiv	surjektiv	bijektiv
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$	☐	☐	☐
$f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin(x)$	☐	☒	☐
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \exp(x)$	☒	☐	☐
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = \exp(x)$	☒	☒	☒

Lösung:

H13.3. Vollständige Induktion

Beweisen Sie mittels Vollständiger Induktion: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

„$n = 1$“ (Induktionsanfang): $\sum\limits_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot(1+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$.

„$n \mapsto n+1$“ (Induktionsschritt):

Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ (Induktionsvoraussetzung, I.V.).

Dann gilt auch $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)+1}$ (Induktionsschluss), denn

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \stackrel{\text{I.V.}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= 1 + \frac{-(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}. \quad \square$$

H13.4. Grenzwerte

Bestimmen Sie, falls definiert, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+n^2+n^4}{(1-2n^2)(1+2n^2)}$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\sqrt{n}}$.

LÖSUNG:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+n^2+n^4}{(1-2n^2)(1+2n^2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}+1}{(\frac{1}{n^2}-2)(\frac{1}{n^2}+2)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2}+1)}{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}-2)\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+2)} = \frac{1}{(-2)\cdot 2} = -\frac{1}{4}$.

(b) Wir erweitern mit $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ um die dritte binomische Formel anwenden zu können:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{(n+1)-(n-1)}$
$= \frac{1+1}{1-(-1)} = 1$.

H13.5. Ableitungen

Sei $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln x}$ für $x > 0$.

(a) Berechnen Sie die erste Ableitung von f?

(b) Wie lautet das Taylorpolynom erster Ordnung von f im Entwicklungspunkt 1?

LÖSUNG:

(a) Mit $g(x) = x\ln x$ und $g'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$ (Produktregel) ist $f'(x) = \mathrm{e}^{g(x)}g'(x) = \mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x+1)$.

(b) Das Taylorpolynom erster Ordnung von f im Entwicklungspunkt 1 lautet $T_{f,1,1}(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + (x-1) = x$, da $f(1) = 1$ und $f'(1) = 1$.

H13.6. Integrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int\limits_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x$ (mit partieller Integration), (b) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$.

LÖSUNG:

(a) $\int\limits_1^2 \underbrace{x}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\ln x}_{g(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{2}\ln 2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

(b) Das uneigentliche Integral wird als Limes eigentlicher Integrale berechnet:
$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int 1^b x^{-3}\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4b^4}\right) = \frac{1}{4}$.

H13.7. Reihen

(a) Begründen Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{n^3}{n!}$ konvergent ist.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum\limits_{n=1}^\infty \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

(c) Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{n}{2^n}x^n$?

LÖSUNG:

(a) Die Quotientenregel mit $a_n = \frac{n^3}{n!}$ ergibt wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 n!}{n^3 (n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = 0 < 1$, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ (sogar absolut) konvergent ist.

(b) Dies ist eine geometrische Reihe, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = -1 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = -1 + \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = -1 + 5 = 4$.

(c) Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$ hat die Koeffizienten $a_n = \frac{n}{2^n}$. Ihr Konvergenzradius ergibt sich als $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n 2^{n+1}}{(n+1)2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2\frac{n}{n+1} = 2$.