



Hausaufgaben

H13.1. Tautologien

Entscheiden Sie mit einer Wahrheitstafel, ob $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ eine Tautologie ist.

H13.2. Funktionen

Entscheiden Sie ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind:

| Funktion | injektiv | surjektiv | bijektiv |
|---|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin(x)$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \exp(x)$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = \exp(x)$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

H13.3. Vollständige Induktion

Beweisen Sie mittels Vollständiger Induktion: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

H13.4. Grenzwerte

Bestimmen Sie, falls definiert, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n^2+n^4}{(1-2n^2)(1+2n^2)},$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\sqrt{n}}.$

H13.5. Ableitungen

Sei $f(x) = e^{x \ln x}$ für $x > 0$.

(a) Berechnen Sie die erste Ableitung von f ?

(b) Wie lautet das Taylorpolynom erster Ordnung von f im Entwicklungspunkt 1?

H13.6. Integrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_1^2 x \ln x \, dx$ (mit partieller Integration),

(b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} \, dx.$

H13.7. Reihen

(a) Begründen Sie, ob die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ konvergent ist.

(b) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n.$

(c) Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$?