Dr. M. Prähofer

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Grundzüge der Höheren Mathematik 1 für Lehramt an Beruflichen Schulen MA9951

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9951_2016W

Wintersemester 2016/17
Lösungsblatt 12
(24.01.2017)

Präsenzaufgaben

P12.1. Polarform komplexer Zahlen

Bestimmen Sie jeweils die kartesische und die Polarform der folgenden komplexen Zahlen:

(a) $2\mathrm{i}$, (b) $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$, (c) $-1-\mathrm{i}$, (d) $\mathrm{e}^{2+\frac{5\pi\mathrm{i}}{3}}$.

Lösung:

(a) $2\mathrm{i} = 0 + \mathrm{i}\cdot 2$ (kartesische Form), $2\mathrm{i} = 2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$ (Polarform).

(b) $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$ ist die Polarform. Es ist $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \sqrt{2}\big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})\big)$
$= \sqrt{2}\big(\cos(\frac{\pi}{4}) - \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4})\big) = \sqrt{2}\big(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\big) = 1 - \mathrm{i}$ (kartesische Form).

(c) $-1-\mathrm{i}$ (kartesische Form). Es ist $-1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}}$ (Polarform).

(d) $\mathrm{e}^{2+\frac{5\pi\mathrm{i}}{3}} = \mathrm{e}^2\cdot\mathrm{e}^{\frac{5\pi\mathrm{i}}{3}}$ ist noch nicht die Polarform, da der Winkel zwischen $-\pi$ und π (einschließlich π) liegen muss. Wegen $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$ gilt aber $\mathrm{e}^{2+\frac{5\pi\mathrm{i}}{3}} = \mathrm{e}^2\cdot\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}-\frac{1\pi\mathrm{i}}{3}} = \mathrm{e}^2\mathrm{e}^{-\frac{1\pi\mathrm{i}}{3}}$, die korrekte Polarform. Die kartesische Form ist
$\mathrm{e}^{2+\frac{5\pi\mathrm{i}}{3}} = \mathrm{e}^2(\cos\frac{\pi}{3} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^2\sqrt{3}}{2}$.

P12.2. Einheitswurzeln

Bestimmen alle Lösungen der folgenden Gleichungen und skizzieren Sie ihre Positionen in der komplexen Ebene:

(a) $z^7 = 1$, (b) $z^7 + 3\mathrm{i} = 0$.

Lösung:

(a) Laut Vorlesung sind genau die 7 Zahlen $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}k}$, $k = 0,1,\ldots,6$, die Lösungen von $z^7 = 1$.

(b) Die Gleichung $z^7+3\mathrm{i} = 0$ ist äquivalent zu $z^7 = -3\mathrm{i} = 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$. Eine Lösung ist $\sqrt[7]{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{14}}$. Alle Lösungen erhält man unter Verwendung des Ergebnisses aus (a):

$$z_k = \sqrt[7]{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi/2+2\pi k}{7}}, \quad k = 0,\ldots,6.$$

P12.3. Fourierreihen

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi < x \le 0, \\ 1 & \text{für } 0 < x \le \pi, \end{cases}$ und geben Sie die Fourierreihe von f an.

LÖSUNG:

Die Fourierkoeffizienten lauten

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x = 0,$$

für $k \in \mathbb{N}_0$, da der Integrand als Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion immer ungerade ist, und für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\Bigg(\int\limits_{-\pi}^{0} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{d}x\Bigg)\\
&= \frac{1}{\pi}\Bigg(-\int\limits_{-\pi}^{0}\sin(kx)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi}\sin(kx)\mathrm{d}x\Bigg) = \frac{1}{\pi}\Bigg(-\int\limits_{-\pi}^{0}\sin(kx)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi}\sin(kx)\mathrm{d}x\Bigg)\\
&= \frac{1}{\pi}\Bigg(-\Big[-\frac{\cos(kx)}{k}\Big]_{-\pi}^{0} + \Big[-\frac{\cos(kx)}{k}\Big]_{0}^{\pi}\Bigg) = \frac{1}{\pi}\Bigg(\frac{1}{k} - \frac{\cos(-k\pi)}{k} - \frac{\cos(k\pi)}{k} + \frac{1}{k}\Bigg)\\
&= \frac{2}{\pi}(1-(-1)^k).
\end{aligned}$$

Die Fourierreihe von f lautet somit

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}(1-(-1)^k)\sin(kx) = \frac{4}{\pi}\Big(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\Big)$$

Hausaufgaben

H12.1. Polarform komplexer Zahlen

Bestimmen Sie die kartesische und die Polarform der folgenden komplexen Zahlen:

(a) $\frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$, (b) $2\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi}$ (c) $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$, (d) $\mathrm{e}^{\ln 3+\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

LÖSUNG:

(a) $\frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$ (kartesische Form), Länge: $\left|\frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$, Winkel: $\frac{3}{4}\pi$, Polarform: $\frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = 1\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi}$.

(b) $2\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}}}_{=1} = \underbrace{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}_{\text{Polarform}} = -2 = \underbrace{-2+0\cdot\mathrm{i}}_{\text{kartesische Form}}$.

(c) $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ ist in kartesischer Form. Da $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ und $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist, gilt $1+\sqrt{3}\,\mathrm{i} = 2\cos(\frac{\pi}{3}) + 2\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{3}) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

(d) $\mathrm{e}^{\ln 3+\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\ln 3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = \underbrace{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}}_{\text{Polarform}} = 3\cos(\frac{3}{4}\pi) + \mathrm{i}\cdot 3\sin(\frac{3}{4}\pi) = \underbrace{-\frac{3\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{3\sqrt{2}}{2}}_{\text{kartesische Form}}$.

H12.2. Einheitswurzeln

Bestimmen alle Lösungen der folgenden Gleichungen und skizzieren Sie ihre Positionen in der komplexen Ebene:

(a) $z^5 = 1$, (b) $z^5 + 32 = 0$.

LÖSUNG:

(a) Laut Vorlesung sind genau die 5 Zahlen $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}k}$, $k = 0, 1, \ldots, 4$, die Lösungen von $z^5 = 1$.

(b) Die Gleichung $z^5 + 32 = 0$ ist äquivalent zu $z^5 = -32 = 2^5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$. Eine Lösung ist $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$. Alle Lösungen erhält man unter Verwendung des Ergebnisses aus (a):

$$z_k = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2\pi k}{5}}, \quad k = 0, \ldots, 4.$$

H12.3. Fourierreihen

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x) = x$ für $x \in (-\pi, \pi]$. und geben Sie die Fourierreihe von f an.

LÖSUNG:

Die Fourierkoeffizienten lauten

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx)\mathrm{d}x = 0,$$

für $k \in \mathbb{N}$, da der Integrand als Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion immer ungerade ist. Für $k \in \mathbb{N}$ ist (mit partieller Integration)

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\left[x\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{-\cos(kx)}{k}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos(-k\pi) - \pi\cos(k\pi)}{k} + \left[\frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) = -\frac{2(-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Die Fourierreihe von f lautet somit

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^k}{k}\sin(kx) = -2\sin(x) + 4\frac{\sin(2x)}{2} - 6\frac{\sin(3x)}{3} \pm \cdots$$