TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Grundzüge der Höheren Mathematik 1 für Lehramt an Beruflichen Schulen MA9951

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9951_2016W

Wintersemester 2016/17
Lösungsblatt 11
(17.01.2017)

Präsenzaufgaben

P11.1. Konvergenzbereich und Konvergenzradius von Potenzreihen

Bestimmen Sie den Konvergenzradius und den Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$, (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$, (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$, (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n}$, (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^n}$.

Lösung:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$, $a_n = n$, Konvergenzradius $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Da die Folge der Summanden für $x = 1$ und $x = -1$ keine Nulfolge bilden ist der Konvergenzbereich $(-1, 1)$.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}$ genau dann, wenn $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, bzw., wenn $|x| < 2$. Dies ist der Konvergenzbereich. Der Konvergenzradius ist also 2, wie man auch mittels $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = 2$ sieht.

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n}$, die selben Koeffizienten wie in (b), nur mit Entwicklungspunkt 3. Also ist der Konvergenzradius 2 und der Konvergenzbereich das Intervall $(3-2, 3+2) = (1, 5)$. Dort hat die Potenzreihe den Wert $\frac{2}{2-(x-3)} = \frac{2}{5-x}$.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x-1)^n$, also Entwickungspunkt 1. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, der Konvergenzradius ist also wieder $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1$. Für $x = 0$ divergiert die harmonische Reihe, für $x = 2$ ergibt sich die alternierende harmonische Reihe, die nach Leibniz konvergiert. Der Konvergenzbereich ist also $(0, 2]$.

Vergleichen wir mit der Formel aus der Vorlesung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, erhalten wir sogar explizit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n} = -\ln(1-(1-x)) = -\ln x$ für $x \in (0, 2)$. Bemerkung: Diese Identität gilt sogar auch noch für $x = 2$, woraus der Wert der alternierend harmonischen Reihe ergibt:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2 \approx 0.69314718.$$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^n}$, $a_n = \frac{1}{n^n}$, Konvergenzradius $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \infty$. Der Konvergenzbereich ist also ganz $\mathbb{R}$.

P11.2. Potenzreihen erkennen

Welche Funktionen werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt und wie ist ihr Konvergenzbereich?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} \pm \cdots$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$.

LÖSUNG:

(a) Die Reihe ähnelt mit dem $n!$ im Nenner der Exponentialreihe. In der Tat ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-x^2}$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = 0+x+2x^2+3x^3+\cdots$, dies ähnelt der Ableitung einer geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots &&= \frac{1}{1-x} && \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot \\
\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} &= 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \cdots &&= \frac{1}{(1-x)^2} && \Big| \cdot x \\
\sum_{n=1}^{\infty} nx^n &= 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots &&= \frac{x}{(1-x)^2} && \Big| \cdot x
\end{aligned}$$

P11.3. Taylorreihen

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Taylorreihe um den Ursprung. Wie lauten jeweils die ersten vier Ableitungen im Nullpunkt?

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, (b) $f(x) = \arctan(x)$, (c) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3}$.

LÖSUNG:

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 \mp \cdots$.
Ein Vergleich mit der Taylorreihe (mit Entwicklungspunkt 0),

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \tfrac{f''(0)}{2} x^2 + \tfrac{f^{(3)}(0)}{6} x^3 + \tfrac{f^{(4)}(0)}{24} x^4 + \cdots,$$

ergibt $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -2$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 24$.

(b) $f(x) = \arctan(x)$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 \mp \cdots,$$

also wegen $\arctan(0) = 0$,

$$\arctan(x) = f(x) = 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \mp \cdots,$$

und damit durch Vergleich mit der Taylorreihe, der $f^{(n)}(0) = n! a_n$ ergibt:
$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -2$, $f^{(4)}(0) = 0$ (und $f^{(5)}(0) = 24$).

(c) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2} + \cdots$. Vergleich mit der Taylorreihe ergibt hier $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = 3! \cdot 1 = 6$, $f^{(4)}(0) = 0$.

Hausaufgaben

H11.1. Konvergenzbereich und Konvergenzradius von Potenzreihen

Bestimmen Sie den Konvergenzradius und den Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$, (c) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{\sqrt{n}}$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (x-1)^n$.

LÖSUNG:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$. Der Konvergenzradius ist
$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n!}}{\frac{n+2}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}(n+1) = \infty$, d.h., der Konvergenzbereich ist ganz $\mathbb{R}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$. Der Konvergenzradius ist
$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Für $x = \pm\frac{1}{3}$ bilden die Summanden keine Nullfolge, der Konvergenzbereich ist also $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}$. Diese Potenzreihe konvergiert genau dann wenn die Potenzreihe in (b) für x^2 an Stelle von x konvergiert, also wenn $x^2 \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Der Konvergenzradius kann also nur gleich $\frac{1}{\sqrt{3}}$ sein.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{\sqrt{n}}$. Diese Potenzreihe ist nach Leibniz konvergent für $x = 1$, aber divergent für $x = -1$. Demnach kann ihr Konvergenzradius nur gleich 1 sein, da ihr Konvergenzbereich das Intervall $[-1, 1)$ ist.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (x-1)^n$. Diese Potenzreihe hat die selben Koeffizienten wie in (b), der Konvergenzradius ist also der selbe, nämlich $\frac{1}{3}$. Hier ist der Entwicklungspunkt aber bei $+1$. Der Konvergenzbereich ist also im Vergleich zu (b) nur verschoben, er ist nämlich $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

H11.2. Potenzreihen erkennen

Welche Funktionen werden durch die folgenden Potenzreihen dargestellt und wie ist ihr Konvergenzbereich?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \cdots$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} = (x-1) - \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^5}{120} \mp \cdots$.

LÖSUNG:

(a) Diese Potenzreihe kann man in Form einer geometrischen Reihe schreiben:
$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$, mit Konvergenz, falls $|x^2| < 1$, bzw., $|x| < 1$, also ist der Konvergenzbereich $(-1, 1)$ (siehe P11.3.(a)).

(b) In der Übung wurde die Taylorreihe des Sinus angegeben:
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x}{5!} \mp \cdots$. Durch direkten Vergleich erhält man sofort
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x-1)$.

H11.3. Taylorreihen

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils das Taylorpolynom um den Ursprung bis zur 4. Ordnung.

(a) $f(x)=(1+x)^a$, $a\in\mathbb{R}$, (b) $f(x)=\ln(1+x)$, (c) $f(x)=\tan(x)$.

LÖSUNG:

(a) $f(x)=(1+x)^a$, $a\in\mathbb{R}$. Wir berechnen: $f'(x)=a(1+x)^{a-1}$, $f''(x)=a(a-1)(1+x)^{a-2}$, $f^{(3)}(x)=a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}$, $f^{(4)}(x)=a(a-1)(a-2)(a-3)(1+x)^{a-4}$. Somit lautet das 4. Taylorpolynom

$$T_{f,0,4}(x)=\sum_{n=0}^{4}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+ax+\tfrac{a(a-1)}{2}x^2+\tfrac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3+\tfrac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{24}x^4.$$

(b) $f(x)=\ln(1+x)$, $f'(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, also erhält man wegen $\ln(1+0)=0$ durch integrieren:

$$\ln(1+x)=f(x)=0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\pm\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(-1)^n}{n}x^n.$$

Das gesuchte Taylorpolynom ist also $T_{f,0,4}(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$.

(c) $f(x)=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $f(0)=0$,
$f'(x)=\frac{\cos(x)\cos(x)-\sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2}=\frac{1}{\cos(x)^2}$, $f'(0)=1$,
$f''(x)=\frac{-2}{\cos(x)^3}(-\sin(x))=2\frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}$, $f''(0)=0$,
$f^{(3)}(x)=2\frac{\cos(x)\cos(x)^3-\sin(x)\cdot 3\cos(x)^2(-\sin x)}{\cos(x)^6}=2\frac{\cos(x)^2+3\sin(x)^2}{\cos(x)^4}=2\frac{1+2\sin(x)^2}{\cos(x)^4}$, $f^{(3)}(0)=2$.
Für die vierte Ableitung bei $x=0$ gilt $f^{(4)}(0)=0$, da tan eine ungerade Funktion ist. Somit lautet das gesuchte Taylorpolynom $T_{f,0,4}(x)=x+\frac{2}{3!}x^3=x+\frac{x^3}{3}$.