TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
**Zentrum Mathematik**

Dr. M. Prähofer

# Grundzüge der Höheren Mathematik 1 für Lehramt an Beruflichen Schulen MA9951

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9951_2016W

Wintersemester 2016/17
Lösungsblatt 10
(10.01.2017)

## Präsenzaufgaben

### P10.1. Beispiele für Reihen

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie wenn möglich ihren Grenzwert:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n-5}{3n-7}$, (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n}$, (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n+3}{5^n}$, (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

Lösung:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n-5}{3n-7}$ ist nicht konvergent, da die Folge der Summanden $\frac{2n^2+n-5}{3n-7} = n\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}}{3-\frac{7}{n}}$ keine Nullfolge ist.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}$, als geometrische Reihe.

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n+3}{5^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\left(-\frac{4}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{4}{5}} + \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{9} + \frac{5}{2} = \frac{55}{18}$.

(d) Wir betrachten die Folge der Teilsummen,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Daher ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

### P10.2. Konvergenzkriterien

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$, (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Lösung:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist nach dem Integralkriterium konvergent, da die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ für $x \geq 1$ streng monoton fallend und positiv ist und das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$$

existiert.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ ist nach Wurzelkriterium konvergent, denn es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ ist nach Quotientenkriterium absolut konvergent, denn

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{n+1}{n})^3}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ist konvergent nach dem Leibniz-Kriterium, denn mit der positiven, streng monoton fallenden Nullfolge $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ist die Reihe von der Form $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, also alternierend.

**P10.3. Zenons Paradox**

Sie sind 10 Minuten zu spät in die Vorlesung gekommen, der Dozent hat bereits eine Tafel vollgeschrieben. Sie können doppelt so schnell abschreiben wie der Dozent an die Tafel schreibt. Sie beginnen sofort, das Versäumte abzuschreiben. In der selben Zeit schreibt der Dozent natürlich weiter und hat eine weitere halbe Tafel gefüllt. Bis Sie diese halbe Tafel wiederum abgeschrieben haben, hat der Dozent eine weitere viertel Tafel Vorsprung. Der Abstand verringert sich zwar ständig, aber können Sie den Dozenten jemals einholen?

LÖSUNG:

Jedesmal wenn Sie den Tafelanschrieb bis zu dem Punkt abgeschrieben haben, der beim letzten Innehalten schon fertig gestellt war, ist wieder etwas dazu gekommen. Dies geschieht in der Tat unendlich oft. Würden sowohl Dozent als auch Student jeweils an diesen Punkten kurz verschnaufen, sagen wir jeweils 1 ms, dann könnten Sie in der Tat niemals den Dozenten einholen.

Da jedoch weder Sie noch der Dozent an diesen willkürlichen Zeitpunkten pausieren, werden Sie natürlich den Dozenten einholen. Das Paradoxon lässt sich folgendermaßen auflösen:
Wir betrachten die Folge $(t_n)$ der Zeitpunkte, zu denen wir jeweils Ihren Fortschritt bzw. den des Dozenten messen. Als Zeiteinheit nehmen wir die Zeit, die Sie benötigen um eine Tafel abzuschreiben, also 10 min, dann ist $t_0 = 1$. Als nächstes betrachten wir die Situation zum Zeitpunkt $t_1 = 1 + \frac{1}{2}$, dann $t_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, und so weiter. Allgemein gilt

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Jetzt erkennt man: Die Folge der Zeitpunkte, zu denen wir die Situation betrachten, ist eine geometrische Reihe und konvergiert gegen den Grenzwert $T := \lim\limits_{n\to\infty} t_n = \frac{1}{1-1/2} = 2$.
Wir betrachten also unendlich viele Zeitpunkte, die alle zwischen 10 min und 20 min nach Beginn der Vorlesung liegen. In dieser Zeit schafft der Dozent genau zwei Tafeln voll zu schreiben. Während dessen hat der Dozent immer einen Vorsprung. Zum Zeitpunkt $T = 2$, also 20 min nach Vorlesungsbeginn haben auch Sie genau 2 Tafeln abgeschrieben, da Sie erst 10 min nach Beginn angefangen haben. Zum Zeitpunkt $T = 2$ holen Sie den Dozenten also ein.
Dieser scheinbare Widerspruch, dass es unendlich viele wohldefinierte Zeitpunkte in einem endlichen Zeitintervall geben kann, ist übrigens auch als "Paradoxon des Zenon" oder "Achilles und die Schildkröte" bekannt.

**Hausaufgaben**

## H10.1. Beispiele für Reihen

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie wenn möglich ihren Grenzwert:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{7n+3n^2}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(-3)^n}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{64n}$, (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{\pi^n}$.

LÖSUNG:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+5}{7n+3n^2}$ ist nicht konvergent, da $\frac{2n^2+5}{7n+3n^2} = \frac{2+\frac{5}{n^2}}{3+\frac{7}{n}}$ keine Nullfolge ist.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(-3)^n} = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = -2 + 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = -2 + \frac{2}{1+\frac{1}{3}} = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$, als geomoetrische Reihe. Alternativ:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(-3)^n} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} - \frac{2}{3^3} \pm \cdots = -\frac{2}{3}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \mp \cdots) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{64n} = \frac{1}{64} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent als Vielfaches der harmonischen Reihe.

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{\pi^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{e}}{\pi}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\mathrm{e}}{\pi}} = \frac{\pi}{\pi-\mathrm{e}}$, da $0 < \frac{\mathrm{e}}{\pi} < 1$ ist.

## H10.2. Konvergenzkriterien

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n-2}\right)^n$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 2^n}{(n^2+1)3^n}$, (d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$.

LÖSUNG:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ ist konvergent nach Vorlesung, da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ konvergent ist für $a > 1$.
Explizit erhält man Konvergenz nach dem Integralkriterium, da die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^{3/2}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ für $x \geq 1$ streng monoton fallend und positiv ist und das uneigentliche Integral

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} x^{-3/2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} [-\tfrac{1}{2}x^{-1/2}]_1^b = \lim_{b\to\infty} (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\sqrt{b}}) = \tfrac{1}{2}$$

existiert.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n-2}\right)^n$ ist konvergent nach Wurzelkriterium, denn es ist
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{3n-2}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n-2} = \frac{2}{3} < 1$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 2^n}{(n^2+1)3^n}$ ist konvergent nach Quotientenkriterium, denn es ist

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^3 2^{n+1}}{((n+1)^2+1)3^{n+1}}}{\frac{n^3 2^n}{(n^2+1)3^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^3}{\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} \frac{(1+\frac{1}{n})^3}{\frac{(1+\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{2}{3} < 1.$$

(d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ ist konvergent nach dem Leibniz-Kriterium, denn mit der positiven, streng monoton fallenden Nullfolge $a_n = \frac{1}{\ln n}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, ist die Reihe von der Form $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$, also alternierend.

**H10.3. Zenon beim Gassigehen**

Herrchen und Hund sind 100 m von einem Baum entfernt. Herrchen geht mit 5 km/h zu dem Baum. Gleichzeitig läuft sein Hund mit 15 km/h zum Baum, dreht dort sofort um und läuft zurück zum Herrchen, dreht wieder zum Baum um, usw. Welche Strecke legt der Hund zurück?

LÖSUNG:

Die kurze Antwort: 300 m, da er dreimal so schnell ist, wie sein Herrchen.
Umständlicher geht das auch so: Wir bezeichnen mit $s_n$ den Abstand des Herrchens vom Baum, wenn der Hund das $n$-te mal zu ihm zurückkommt. Also $s_0 = 100$ m.
Sind nun Hund und Herrchen beide im Abstand $s_n$ vom Baum. Wenn der Hund die Strecke $s_n$ zurückgelegt hat, hat das Herrchen die Strecke $\frac{1}{3}s_n$ zurückgelegt, sein Abstand ist also noch $\frac{2}{3}s_n$ vom Baum. Jetzt laufen sich beide entgegen, mit einer Relativgeschwindigkeit die viermal so groß ist, wie die des Herrchens. Wenn beide sich wieder treffen, haben das Herrchen also $\frac{1}{4}$ und der Hund $\frac{3}{4}$ der Strecke $\frac{2}{3}s_n$ zurückgelegt und treffen sich im Abstand $s_{n+1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}s_n = \frac{1}{2}s_n$ wieder. Somit ist $s_1 = 50$ m, $s_2 = 25$ m, usw. Insgesamt legt der Hund die Strecke

$$s_0 + 2s_1 + 2s_2 + 2s_3 + \cdots = 100 \text{ m} + 2 \cdot 100 \text{ m} \cdot (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots) = 300 \text{ m}$$

zurück.