TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Grundzüge der Höheren Mathematik 1 für Lehramt an Beruflichen Schulen MA9951

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9951_2016W

Wintersemester 2016/17
Lösungsblatt 9
(20.12.2016)

Präsenzaufgaben

P9.1. Stammfunktionen

Geben Sie jeweils alle Stammfunktionen der angegebenen Funktionen an:

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 2x^3$, (b) $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x$, (c) $f(x) = \cos x \cdot \mathrm{e}^{\sin x}$.

Lösung:

(a) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int(\mathrm{e}^{-2x} + 2x^3)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{2x^4}{4} + C = \frac{1}{2}(x^4 - \mathrm{e}^{-2x}) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

(b) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int x \cdot \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = (x-1)\mathrm{e}^x + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ durch partielle Integration.

(c) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \cos x \cdot \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\sin x} \sin' x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\sin x} + C$ nach der Substitutionsregel.

P9.2. Bestimmte Integrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int\limits_1^3 \frac{1-t^2}{t}\mathrm{d}t$, (b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\mathrm{d}x$, (c) $\int\limits_{-2}^{2} 2^x\mathrm{d}x$.

Lösung:

(a) $\int\limits_1^3 \frac{1-t^2}{t}\mathrm{d}t = \int\limits_1^3(\frac{1}{t} - t)\mathrm{d}t = \left[\ln t - \frac{1}{2}t^2\right]_1^3 = (\ln 3 - \frac{9}{2}) - (\ln 1 - \frac{1}{2}) = \ln 3 - 4$.

(b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(-\cos(2\frac{\pi}{2}) + \cos(0)) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$.

(c) $\int\limits_{-2}^{2} 2^x\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{2} \mathrm{e}^{(\ln 2)x}\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{(\ln 2)x}}{\ln 2}\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-2}^{2} = \frac{4-\frac{1}{4}}{\ln 2}$.

P9.3. Uneigentliche Integrale

Berechnen Sie jeweils die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$, (b) $\int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$.

Lösung:

(a) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^b x^{-3}\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{1}{-2b^2} - \frac{1}{-2\cdot 1^2}\right) = \frac{1}{2}$.

(b) Der Integrand ist bei $x = 1$ nicht definiert. Somit ist
$\int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to 1}\int\limits_a^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to 1}\left[\frac{1}{2}(x-1)^{1/2}\right]_a^2 = \lim\limits_{a\to 1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-1} - \frac{1}{2}\sqrt{a-1}\right) = \frac{1}{2}$.

Hausaufgaben

H9.1. Stammfunktionen

Geben Sie jeweils alle Stammfunktionen der angegebenen Funktionen an:

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 2x^3$, (b) $f(x) = 1 \cdot \ln x$, (c) $f(x) = \frac{(\ln x)^3}{x}$.

LÖSUNG:

(a) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int(\mathrm{e}^{-2x} + 2x^3)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{2x^4}{4} + C = \frac{1}{2}(x^4 - \mathrm{e}^{-2x}) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

(b) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x\mathrm{d}x = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ durch partielle Integration.

(c) $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{(\ln x)^3}{x}\mathrm{d}x = \int(\ln x)^3 \ln' x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C$ nach der Substitutionsregel.

H9.2. Bestimmte Integrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$, (b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\mathrm{d}x$, (c) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

LÖSUNG:

(a) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \big[\arctan x\big]_{-1}^{1} = \arctan(1) - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$,
da $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ ist.

(b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin x}_{f(x)}\underbrace{\cos x}_{g'(x)}\mathrm{d}x = \big[\sin x \cdot \sin x\big]_{0}^{\pi/2} - \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin x\mathrm{d}x = 1 - \underbrace{\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\mathrm{d}x}_{=:A}$. Der gesuchte Wert des Integrals A taucht auch auf der linken Seite der Gleichung auf, also $A = 1 - A$, bzw., $A = \frac{1}{2}$.

(c) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \overset{g(x)=1+x^2}{=} \int\limits_{-1}^{1}(g(x))^{-\frac{1}{2}}g'(x)dx = \Big[\frac{1}{2}(g(x))^{1/2}\Big]_{-1}^{1} = \Big[\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\Big]_{-1}^{1} = 0$.

H9.3. Uneigentliche Integrale

Berechnen Sie jeweils die folgenden uneigentlichen Integrale:

(a) $\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$, $a > 0$, (b) $\int\limits_{0}^{\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

LÖSUNG:

(a) $\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{0}^{b} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \Big[\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{-a}\Big]_{x=0}^{b} = \lim\limits_{b\to\infty} \Big(- \frac{\mathrm{e}^{-ab}}{a} + \frac{1}{a}\Big) = \frac{1}{a}$.

(b) $\int\limits_{0}^{\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{0}^{b} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty} \Big(\big[- x\mathrm{e}^{-x}\big]_{0}^{b} - \int\limits_{0}^{b} 1 \cdot (-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x\Big)$
$= \lim\limits_{b\to\infty} \Big(- b\mathrm{e}^{-b} + 0 - \big[\mathrm{e}^{-x}\big]_{0}^{b}\Big) = \lim\limits_{b\to\infty} \Big(- b\mathrm{e}^{-b} - \mathrm{e}^{-b} + 1\Big) = 1$,
da $\lim\limits_{b\to\infty}(1+b)\mathrm{e}^{-b} = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{1+b}{\mathrm{e}^b} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{b\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^b} = 0$ ist.