TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Grundzüge der Höheren Mathematik 1
für Lehramt an Beruflichen Schulen
MA9951

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9951_2016W

Wintersemester 2016/17
Lösungsblatt 7
(06.12.2016)

Präsenzaufgaben

P7.1. Summen-, Produkt- und Quotientenregel

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Ausdrücke als Funktionen von x.

(a) $\frac{6}{x^3} + \ln(x^4)$, (b) $x^5 \mathrm{e}^x$, (c) $\frac{x}{x^2+1}$.

Lösung:

(a) $f(x) = \frac{6}{x^3} + \ln(x^4) = \frac{6}{x^3} + 4\ln(x)$, dann ist $f'(x) = 6\frac{-3}{x^4} + 4\frac{1}{x} = \frac{4}{x} - \frac{18}{x^3}$.

(b) $h(x) = f(x)g(x)$, mit $f(x) = x^5$, $g(x) = \mathrm{e}^x$, $f'(x) = 5x^4$, $g'(x) = \mathrm{e}^x$. Also ist mit der Produktregel $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 5x^4\mathrm{e}^x + x^5\mathrm{e}^x = (x^5 + 5x^4)\mathrm{e}^x$.

(c) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, mit $f(x) = x$, $g(x) = x^2 + 1$, $f'(x) = 1$, $g'(x) = 2x$. Also ist mit der Quotientenregel $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{1\cdot(x^2+1) - x\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{1+2x^2+x^4}$.

P7.2. Kettenregel

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Ausdrücke als Funktionen von x.

(a) e^{x^2}, (b) $\sqrt{x^2+1}$, (c) $\ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.

Lösung:

(a) $h(x) = \mathrm{e}^{x^2} = f(g(x))$, mit $f(y) = \mathrm{e}^y$, $g(x) = x^2$, $f'(y) = \mathrm{e}^y$, $g'(x) = 2x$. Daher ist mit der Kettenregel $h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \mathrm{e}^{g(x)}g'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$.

(b) $h(x) = \sqrt{x^2+1} = f(g(x))$, mit $f(y) = \sqrt{y}$, $g(x) = x^2 + 1$, $f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $g'(x) = 2x$. Daher ist mit der Kettenregel $h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

(c) $h(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = f(g(x))$, mit $f(y) = \ln y$, $g(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$, $f'(y) = \frac{1}{y}$, $g'(x) = \mathrm{e}^x + (-1)\mathrm{e}^{-x}$. Daher ist mit der Kettenregel
$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$

P7.3. Ableitung der Umkehrfunktion

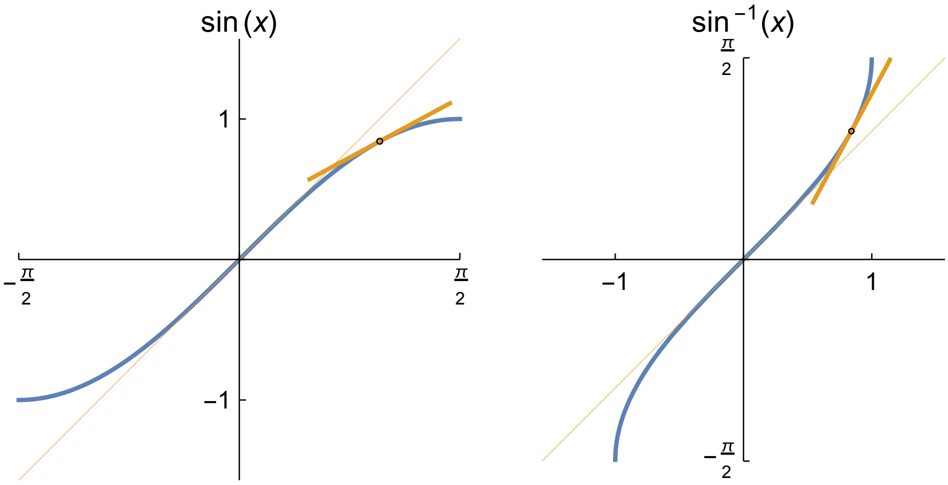
Bestimmen Sie die Ableitung des Arcussinus, $\arcsin : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, der Umkehrfunktion des auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ eingeschränkten sin. Veranschaulichen Sie das Ergebnis an Hand einer Skizze.

Lösung:

Für $y \in (-1, 1)$ gilt $\arcsin(y) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, so dass $\sin(\arcsin(y)) = y$ ist. Für die Ableitung gilt nun

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} \overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

In $(*)$ wird benutzt, dass für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gilt: $\cos x = \sqrt{1+\sin^2 x}$.



Hausaufgaben

H7.1. Summen-, Produkt- und Quotientenregel

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Ausdrücke als Funktionen von x.

(a) $e^x \cos x$, (b) $x \ln x - x$, (c) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Lösung:

(a) $f(x) = e^x \cos x$, $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x(\cos x - \sin x)$.

(b) $f(x) = x \ln x - x$, $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.

(c) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\cot'(x) = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

H7.2. Kettenregel

Bestimmen Sie jeweils die Ableitung der folgenden Ausdrücke als Funktionen von x.

(a) $e^{x \sin x + 2}$, (b) $\ln(1+x^2)$, (c) $\sqrt{e^{x^2}+1}$.

Lösung:

(a) $f(x) = e^{x \sin x + 2}$, $f'(x) = e^{x \sin x + 2}(x \cos x + \sin x)$, da $f(x) = g(h(x))$ mit $g(y) = g'(y) = e^y$ und $h(x) = x \sin x + 2$, $h'(x) = x \cos x + \sin x$.

(b) $f(x) = \ln(1+x^2)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$.

(c) $f(x) = \sqrt{e^{x^2}+1} = f_1(f_2(f_3(x)))$ mit $f_1(z) = \sqrt{z}$, $f_2(y) = e^y + 1$ und $f_3(x) = x^2$. Zweimaliges anwenden der Kettenregel ergibt

$$f'(x) = f_1'(f_2(f_3(x))) \cdot f_2'(f_3(x)) \cdot f_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^{x^2}+1}} \cdot e^{x^2} \cdot 2x = \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$$

H7.3. Ableitung der Umkehrfunktion

Bestimmen Sie die Ableitung des Arcustangens, $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, der Umkehrfunktion des auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ eingeschränkten tan, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, und veranschaulichen Sie das Ergebnis an Hand einer Skizze.

LÖSUNG:

Für $y \in \mathbb{R}$ gilt $\arctan(y) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, so dass $\tan(\arctan(y)) = y$ ist. Für die Ableitung gilt nun

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(y))}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1+y^2}.$$

In $(*)$ wird benutzt, dass für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gilt: $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$, bzw., $\cos^2 x \tan^2 x + \cos^2 x = 1$, bzw., $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$.