Präsenzaufgaben

P6.1. Gleichung mit Exponentialfunktion

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$.

LÖSUNG:

Setzt man $z = e^x$, so ist die Gleichung $z^2 - 4z + 3 = 0$ zu lösen. Nach der Mitternachtsformel erhält man die Lösungen $z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1$.
Damit ist $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$ äquivalent zu $e^x = 1 \vee e^x = 3$.
Da die Exponentialfunktion streng monoton steigend ist, haben diese beiden Gleichungen jeweils nur eine Lösung, nämlich $x = \log(1) = 0$ und $x = \log(3) = \ln 3$.
Somit hat die Gleichung $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$ genau die zwei Lösungen $x = 0$ und $x = \ln 3 \approx 1.1$.

P6.2. Harmonische Schwingung

Seien $a > 0$, $b > 0$ und $c \in \mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = a \sin(bx + c).$$

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften von f:

(a) $|f(x)| \leq a$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x + \frac{2\pi}{b}) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) $f(x) = 0$, genau dann, wenn $x = \frac{k\pi - c}{b}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

LÖSUNG:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Also ist $0 \leq \sin^2 x \leq 1$. Und damit $-1 \leq \sin x \leq 1$, bzw., $|\sin x| \leq 1$.(Genauso gilt natürlich auch $|\cos x| \leq 1$.)
Damit gilt aber auch für alle $x \in \mathbb{R}$, dass $|\sin(bx + c)| \leq 1$ ist, und damit auch $|a \sin(bx + c)| \leq a$, was der Behauptung entspricht.

(b) Die Sinus-Funktion ist 2π-periodisch, $\sin(t + 2\pi) = \sin t$. Somit ist

$$f(x + \tfrac{2\pi}{b}) = a \sin(b(x + \tfrac{2\pi}{b}) + c) = a \sin(bx + c + 2\pi) = a \sin(bx + c) = f(x).$$

Mit anderen Worten: Die Funktion f ist $\frac{2\pi}{b}$-periodisch.

(c) Bekannt ist, dass $\sin(t) = 0$ genau dann gilt, wenn $t = \pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Somit gilt:

$$f(x) = 0 \iff \sin(bx+c) = 0 \iff bx+c = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{k\pi - c}{b} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

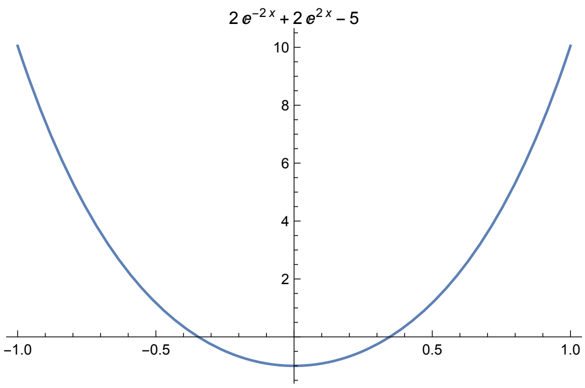
Hausaufgaben

H6.1. Gleichung mit Exponentialfunktion

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $2e^{2x} + 2e^{-2x} = 5$.

LÖSUNG:

Mit der Substitution $z = e^{2x}$ ist die Gleichung $2z + \frac{2}{z} = 5$, bzw., $2z^2 - 5z + 2 = 0$, da $z \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen $z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$, also $z_1 = \frac{1}{2}$ und $z_2 = 2$.
$2e^{2x} + 2e^{-2x} = 5$ ist also gleichbedeutend mit $e^{2x} = \frac{1}{2} \;\wedge\; e^{2x} = 2$, bzw.,
$x = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \;\wedge\; x = \frac{1}{2} \ln 2$, also kurz $x = \pm \frac{\ln 2}{2}$.



H6.2. C14-Methode

In einer Knochenprobe sind noch 10% des natürlichen C14-Anteils vorhanden. Wie alt ist der Fund? (Halbwertszeit C14: 5730 Jahre)

LÖSUNG:

C14-Gehalt zur Zeit t: $\rho(t) = \exp(-\alpha t)$ (also $(\rho(0) = 1 = 100\%)$.
Halbwertszeit $t_H = 5730$ Jahre:
$50\% = \frac{1}{2} = \rho(t_0) = \exp(-\alpha t_0)$, d.h. $\ln(\frac{1}{2}) = -\alpha t_0$, oder $\alpha = -\frac{\ln(\frac{1}{2})}{t_0} = \frac{\ln 2}{t_0}$.
C14-Gehalt nach t Jahren:
$10\% = 0.1 = \exp(-\alpha t)$, also ist $-t\alpha = \ln 0.1$, bzw

$$t = \frac{\ln 0.1}{-\alpha} = -\frac{t_0 \ln 0.1}{\ln 2} = t_0 \frac{\ln(10)}{\ln 2} \approx 3.322 t_0 \approx 19.000 \text{ Jahre}$$

H6.3. Anwendung der Additionstheoreme

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Beziehungen gelten:

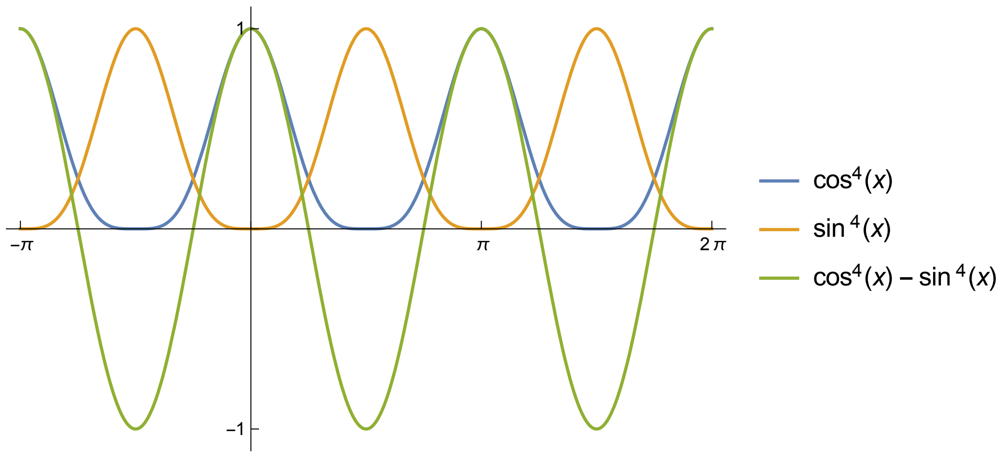
(a) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$, (b) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$, (c) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$.

LÖSUNG:

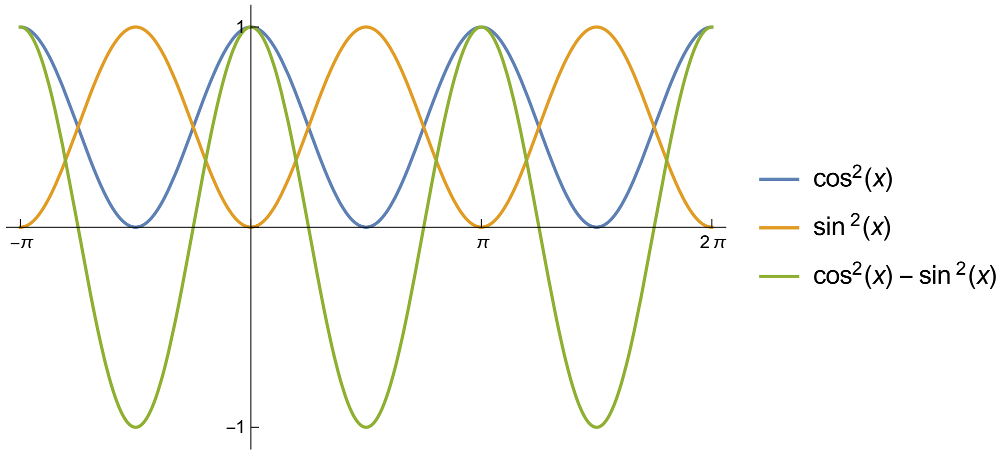
(a) $\cos(2x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2) - \sin^2 x$
$= 1 - 2\sin^2 x$.
Aufgelöst nach $\sin^2 x$ ergibt das $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$,

(b) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$.
Aufgelöst nach $\cos^2 x$ ergibt das $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$,

(c) $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos(2x)$.



1
−1
−π
π
2 π
cos⁴(x)
sin⁴(x)
cos⁴(x) − sin⁴(x)



1
−1
−π
π
2 π
cos²(x)
sin²(x)
cos²(x) − sin²(x)