TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Dr. M. Prähofer

Grundzüge der Höheren Mathematik 1 für Lehramt an Beruflichen Schulen MA9951

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9951_2016W

Wintersemester 2016/17
Lösungsblatt 4
(15.11.2016)

Präsenzaufgaben

P4.1. Operationen mit komplexen Zahlen

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils in der Normalform $a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar und geben Sie jeweils Real-, Imaginärteil und den Betrag an.

(a) $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$, (b) $(1+\mathrm{i})^2$, (c) $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$, (d) i^{101},

(e) $\frac{1}{\mathrm{i}}$, (f) $\frac{1}{1+\mathrm{i}}$, (g) $\frac{1}{\frac{4-3\mathrm{i}}{5}}$, (h) $\frac{1}{2-\mathrm{i}} + \frac{1}{2+\mathrm{i}}$.

Lösung:

(a) $\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = -1 + \mathrm{i}$,

(b) $(1+\mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 2\mathrm{i}$,

(c) $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 1 - \mathrm{i}^2 = 2$,

(d) $\mathrm{i}^{101} = \mathrm{i}^{4\cdot 25}\mathrm{i} = (\mathrm{i}^4)^{25}\mathrm{i} = \mathrm{i}$,

(e) $\frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})} = \frac{-\mathrm{i}}{1} = -\mathrm{i}$,

(f) $\frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{1-\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$,

(g) $\frac{1}{\frac{4-3\mathrm{i}}{5}} = \frac{5(4+3\mathrm{i})}{(4-3\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})} = \frac{5(4+3\mathrm{i})}{25} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i}$,

(h) $\frac{1}{2-\mathrm{i}} + \frac{1}{2+\mathrm{i}} = \frac{(2+\mathrm{i})+(2-\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \frac{4}{2^2+1} = \frac{4}{5}$.

Real- und Imaginärteil können jeweils direkt abgelesen werden. Der Betrag ergibt sich jeweils als $\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$, also $\sqrt{2}, 2, 2, 1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{4}{5}$ für (a) bis (h).

P4.2. Komplexe Nullstellen einer quadratischen Gleichung

Zeigen Sie für $a, b, c \in \mathbb{R}$, mit $4ac - b^2 > 0$ und $z_1 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$, dass

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - \overline{z_1}).$$

Insbesondere sind z_1 und $\overline{z_1}$ die Nullstellen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

Lösung:

Dies ist eine einfache Rechnung:

$$\begin{aligned} a(z - z_1)(z - \overline{z_1}) &= a\Big(z + \frac{b}{2a} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\Big)\Big(z + \frac{b}{2a} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\Big) \\ &= a\Big((z + \frac{b}{2a})^2 - \mathrm{i}^2\big(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}\big)^2\Big) = a\Big(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\Big) \\ &= az^2 + bz + \frac{b^2}{4a} + \frac{4a^2c}{4a^2} - \frac{b^2}{4a} = az^2 + bz + c. \end{aligned}$$

Für $f(x) = ax^2 + bx + c$ erhält man sofort $f(z_1) = a(z_1 - z_1)(z_1 - \overline{z_1}) = 0$ und $f(\overline{z_1}) = a(\overline{z_1} - z_1)(\overline{z_1} - \overline{z_1}) = 0$. Also sind z_1 und $\overline{z_1}$ Nullstellen von f.

P4.3. Vollständige Induktion

Beweisen Sie mittels Vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gerade den Wert n^2 ergibt.

LÖSUNG:

Zu zeigen ist: $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$. Der Induktionsanfang mit $n = 1$ lautet

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2.$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig und die Aussage für dieses n bewiesen (Induktionsvoraussetzung). Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 \overset{\text{I.V.}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

die Formel ist also auch für $n+1$ richtig (Induktionsschritt). Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit gezeigt, dass die Formel für alle n richtig ist. $\square$

Hausaufgaben

H4.1. Rechnen mit komplexen Zahlen

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils in der Normalform $a + \mathrm{i}b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar und geben Sie jeweils Real-, Imaginärteil und den Betrag an.

(a) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, (b) $5 \cdot \dfrac{2+\mathrm{i}}{10-15\mathrm{i}} - \dfrac{-3+7\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$, (c) $\dfrac{1}{1+2\mathrm{i}} + \dfrac{1}{2+\mathrm{i}}$,

(d) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^7$, (e) Lsgn. von $x^2 + 5 = 4x$, (f) Lsgn. von $x^4 + 1 = 0$.

LÖSUNG:

(a) $\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}(= 0 + 1 \cdot \mathrm{i})$.

(b) $5 \cdot \frac{2+\mathrm{i}}{10-15\mathrm{i}} - \frac{-3+7\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}} = \frac{2+\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}} - \frac{-3+7\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}} = \frac{2+\mathrm{i}+3-7\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}} = \frac{(5-6\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}{(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})} = \frac{10+15\mathrm{i}-12\mathrm{i}-18\mathrm{i}^2}{4+9} = \frac{28}{13} + \frac{3}{13}\mathrm{i}$.

(c) $\frac{1}{1+2\mathrm{i}} + \frac{1}{2+\mathrm{i}} = \frac{1-2\mathrm{i}}{1+4} + \frac{2-\mathrm{i}}{4+1} = \frac{3-3\mathrm{i}}{5} = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\mathrm{i}$.

(d) $\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^7 \overset{(a)}{=} \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^7 = (-\mathrm{i})^7 = (-1)^7\mathrm{i}^7 = -1 \cdot \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$

(e) $x^2 - 4x + 5 = 0$ hat die zwei Lösungen $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm \sqrt{\frac{-4}{4}} = 2 \pm \mathrm{i}$.

(f) Die Gleichung $x^4 + 1 = 0$ ist äquivalent zu den beiden Gleichungen $x^2 = z$ und $z^2 = -1$. Letztere hat die beiden Lösungen $z_{1,2} = \pm\mathrm{i}$. Die Lösungen der Gleichung $x^2 = \mathrm{i}$ können wir erraten: $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$ (P4.1.(b)), somit ist $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \mathrm{i}$ und dann auch $\left(-\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \mathrm{i}$. Es sind also $x_{1,2} = \pm\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ die beiden Lösungen von $x^2 = \mathrm{i}$.
Genauso erkennt man wegen $(1-\mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$, dass $\left(\pm\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\mathrm{i}$ ist. $x_{3,4} = \pm\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ sind also die beiden Lösungen von $x^2 = -\mathrm{i}$.
Zusammengefasst finden wir insgesamt 4 Lösungen der Gleichung $x^4 + 1 = 0$, nämlich x_1, x_2, x_3 und x_4.

Real- und Imaginärteil können jeweils aus der Normalform abgelesen werden, der Betrag ist jeweils 1, $\frac{\sqrt{28^2+3^2}}{13} = \frac{\sqrt{793}}{13}$, $\frac{\sqrt{9+9}}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$, 1 für die Teilaufgaben (a) bis (f).

H4.2. Quadratwurzeln einer komplexen Zahl

Bestimmen Sie $x, y \in \mathbb{R}$ so, dass $(x + \mathrm{i}y)^2 = a + \mathrm{i}b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ ist.

LÖSUNG:

Ausmultipliziert ergibt sich $x^2-y^2+\mathrm{i}(2xy)=a+\mathrm{i}b$. Es müssen also die beiden Gleichungen

$$x^2-y^2=a, \qquad 2xy=b$$

erfüllt sein. $x=0$ ist ausgeschlossen, da $b>0$ vorausgesetzt ist, also muss $y=\frac{b}{2x}$ gelten. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$x^2-a-\frac{b^2}{4x^2}=0, \quad \text{bzw.}, \quad x^4-ax^2-\frac{b^2}{4}=0$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2-az-\frac{b^2}{4}=0$ lauten $z_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Da wir nun Lösungen der Gleichung $x^2=z_{1,2}$ suchen, kommt nur z_1 in Frage, da $z_2<0$ ist. Wir erhalten also zwei mögliche Lösungen für x, nämlich $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ und entsprechend für y

$$\begin{aligned} y_{1,2}=\frac{b}{2x_{1,2}} &= \frac{\sqrt{2}b}{\pm 2\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}} = \pm\frac{b\sqrt{2(a+\sqrt{a^2+b^2})}}{2(a+\sqrt{a^2+b^2})} \\ &= \pm\frac{b\sqrt{2(a+\sqrt{a^2+b^2})}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}{2((a^2+b^2)-a^2)} = \pm\frac{\sqrt{2(a+\sqrt{a^2+b^2})}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}{2b} \end{aligned}$$

Zusammengefasst hat die Gleichung für komplexe Zahlen $z^2=a+ib$ immer zwei Lösungen, nämlich $z=\pm(x_1+\mathrm{i}y_1)$.

H4.3. Vollständige Induktion

Beweisen Sie mittels Vollständiger Induktion, dass für alle $n\in\mathbb{N}_0$ gilt:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1$, (b) $(1+x)^n \geq 1+nx$, falls $x\in\mathbb{R}$, $x\geq -1$.

LÖSUNG:

siehe Blatt 5.