Dr. M. Prähofer

Grundzüge der Höheren Mathematik 1 für Lehramt an Beruflichen Schulen MA9951

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9951_2016W

Wintersemester 2016/17
Lösungsblatt 3
(8.11.2016)

Präsenzaufgaben

P3.1. Eins ist größer als Null

Begründen Sie jeweils ausführlich die folgenden Aussagen für beliebiges $a \in \mathbb{R}$.

(a) $0 \cdot a = 0$, (b) $(-1) \cdot a = -a$, (c) $(-1) \cdot (-1) = 1$, (d) $1 > 0$.

Lösung:

(a) $0 \cdot a = (0+0) \cdot a \overset{\text{Distr.}}{=} 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Die Gleichung $0 \cdot a + x = 0 \cdot a$ hat genau eine Lösung, nämlich 0. Also ist $0 \cdot a = 0$.

(b) Die Gleichung $a + x = 0$ hat genau eine Lösung, nämlich $-a$. Außerdem gilt $a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a \overset{\text{Distr.}}{=} (1 + (-1)) \cdot a = 0 \cdot a = 0$. Somit ist auch $(-1) \cdot a$ eine Lösung der Gleichung $a + x = 0$. Also folgt $(-1) \cdot a = -a$.

(c) $0 = (-1) \cdot 0 = (-1) \cdot (1 + (-1)) = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = (-1) + (-1) \cdot (-1)$. Die Gleichung $(-1) + x = 0$ hat genau eine Lösung, nämlich 1. Also ist $(-1) \cdot (-1) = 1$.

(d) $1 > 0$ bedeutet $1 \in \mathbb{R}^+$. Annahme: $1 \notin \mathbb{R}^+$. Dann ist $(-1) \in \mathbb{R}^+$, da $1 \neq 0$. Nach den Anordnungsaxiomen müsste dann auch $(-1) \cdot (-1) \in \mathbb{R}^+$ sein. Dies ist ein Widerspruch, da $(-1) \cdot (-1) = 1$ ist, also muss $1 > 0$ gelten.

P3.2. Bruchrechnen

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\frac{9}{8} \cdot \frac{6}{7}$ (b) $\frac{\frac{7}{12}}{\frac{4}{9}}$ (c) $\frac{4}{15} + \frac{8}{9}$ (d) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

Lösung:

(a) $\frac{9}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{9 \cdot 6}{8 \cdot 7} = \frac{9 \cdot 3}{4 \cdot 7} = \frac{27}{28}$.

(b) $\frac{\frac{7}{12}}{\frac{4}{9}} = \frac{7 \cdot 9}{12 \cdot 4} = \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{21}{16}$

(c) $\frac{4}{15} + \frac{8}{9} = \frac{4 \cdot 9 + 15 \cdot 8}{15 \cdot 9} = \frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 8}{5 \cdot 9} = \frac{52}{45}$

(d) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2} - 1$.

P3.3. Lösungsmenge von Gleichungen/Ungleichungen

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen, bzw., Ungleichungen.

(a) $x^2 - 2x - 15 = 0$, (b) $2x^2 \leq 2x + 12$, (c) $x^4 + 3 < 4x^2$.

LÖSUNG:

(a) $x^2 - 2x - 15 = (x-1)^2 - 1 - 15$, also ist $x^2 - 2x - 15 = 0$ äquivalent zu $(x-1)^2 = 4^2$, bzw., $x - 1 = \pm 4$. Somit ist

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 15 = 0\} = \{-3, 5\}.$$

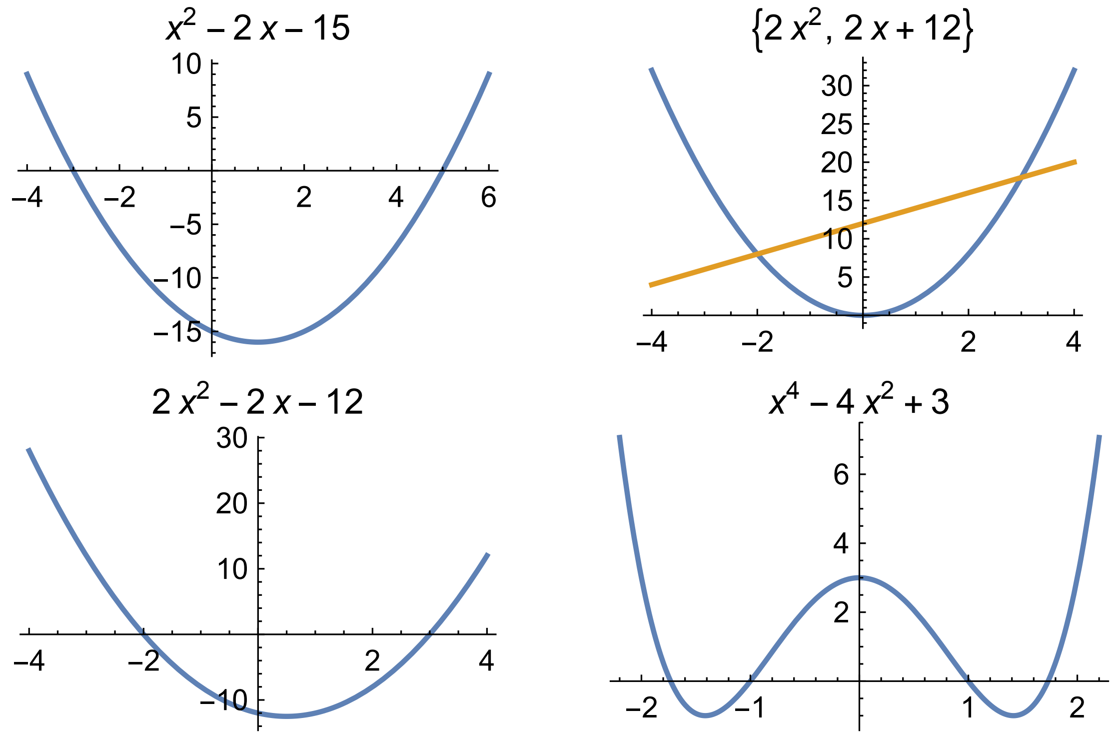
Dieses Ergebnis erhält man natürlich auch direkt mit der "Mitternachtsformel" $x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 15}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} -3, \\ 5. \end{cases}$

(b) $2x^2 \leq 2x + 12$ ist äquivalent zu $2x^2 - 2x - 12 \leq 0$, wegen $2x^2 - 2x - 12 = 2(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 12$ also auch äquivalent zu $2(x - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{25}{2}$. Dies gilt wiederum genau dann, wenn $-\frac{5}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}$. Insgesamt erhalten wir

$$\{x \mid 2x^2 \leq 2x + 12\} = [-2, 3].$$

(c) Wir finden zunächst alle Lösungen der Gleichung $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$, diese biquadratische Gleichung kann durch $z = x^2$ in die quadratische Gleichung $z^2 - 4z + 3 = 0$ überführt werden, mit den Lösungen $z_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = 2 \pm 1 = 1, 3$. Somit ist $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ äquivalent zu $x^2 = z$ und ($z = 1$ oder $z = 3$. Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 4x^2 + 3 = 0\} = \{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}$. Schreibt man $z^2 - 4z + 3 = (z-3)(z-1)$, so erkennt man, dass $z^2 - 4z + 3 < 0$ genau dann, wenn $z \in (1, 3)$ ist. Somit gilt

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 + 3 < 4x^2\} = (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3}).$$



Hausaufgaben

H3.1. Quadratzahlen sind nicht negativ

Begründen Sie jeweils ausführlich die folgenden Aussagen für beliebiges $a \in \mathbb{R}$.

(a) $(-a)^2 = a^2$, (b) $a^2 \geq 0$.

LÖSUNG:

(a) Nach Aufgabe P3.1(b) ist
$(-a)^2 = (-a)\cdot(-a) = ((-1)\cdot a)\cdot((-1)\cdot a) \stackrel{\text{Assoz./Komm.}}{=} (-1)\cdot(-1)\cdot a\cdot a = a\cdot a = a^2.$

(b) Für $a = 0$ ist nichts zu zeigen.
1. Fall: Ist $a \in \mathbb{R}^+$, so folgt sofort, dass $a^2 \in \mathbb{R}^+$ ist, also $a^2 \geq 0$.
2. Fall: Gilt $a \notin \mathbb{R}^+$, dann ist entweder $a = 0$, also auch $a^2 \geq 0$, oder $-a \in \mathbb{R}^+$. In diesem Fall ist mit (a) auch
$a^2 = (-a)^2 \in \mathbb{R}^+$, da ja $-a \in \mathbb{R}^+$. Also auch $a^2 \geq 0$.

H3.2. Bruchrechnen

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\dfrac{192}{35}\cdot\dfrac{63}{256}$ (b) $\frac{\frac{192}{35}}{\frac{256}{63}}$ (c) $\dfrac{1}{a-b} - \dfrac{1}{a+b}$ (d) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

LÖSUNG:

(a) $\frac{192}{35}\cdot\frac{63}{256} = \frac{3\cdot 64\cdot 9\cdot 7}{5\cdot 7\cdot 4\cdot 64} = \frac{3\cdot 9}{5\cdot 5} = \frac{27}{20}(= 1.35)$.

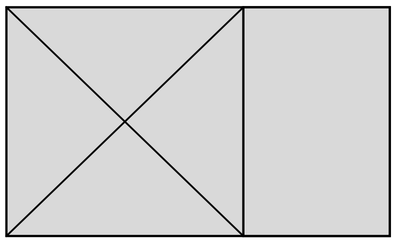
(b) $\frac{\frac{192}{35}}{\frac{256}{63}} = \frac{192}{35}\cdot\frac{63}{256} = \frac{27}{20}$.

(c) $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} = \frac{(a+b)-(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{2b}{a^2-b^2}$, falls $a^2 \neq b^2$

(d) $\frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}(\approx 1.618)$, der Goldene Schnitt.

H3.3. Der Goldene Schnitt

Entwerfen Sie ein rechteckiges Papierformat, das durch Abschneiden eines möglichst großen Quadrats wieder ein Rechteck mit dem selben Seitenverhältnis ergibt (siehe rechte Abbildung). HINWEIS: Stellen Sie eine quadratischen Gleichung für das Seitenverhältnis x auf.



LÖSUNG:

Wenn in der Abbildung die längere Kante die Länge x hat, und die kürzere (senkrechte) Kante die Länge 1, dann soll das Seitenverhältnis der um das Quadrat verkleinerten Seite immer noch das selbe sein, also

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Multipliziert mit $x - 1$ ist dies äquivalent zu $x(x-1) = 1$, bzw., $x^2 - x - 1 = 0$. Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung lauten

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \\ -\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{cases}$$