Präsenzaufgaben

P2.1. Mengen

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 1, 3\}$, $B = \{0, 1, 1, 1\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, 0 \leq x < 3\}$.

(a) Schreiben Sie die Mengen jeweils als einfache Aufzählung.

(b) Welche Teilmengenbeziehungen gibt es?

(c) Bestimmen Sie $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $B \cup C$, $B \cap C$.

(d) Bestimmen Sie $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus A$, $B \setminus C$, $C \setminus A$, $C \setminus B$.

(e) Geben Sie $A \times B$, B^2 und $\mathcal{P}(B)$ an.

Lösung:

(a) Die Reihenfolge und mehrfach aufgeführte Elemente ändern nichts an der Menge, daher ist
$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{0, 1, 2\}$.

(b) Einzig B ist offenbar eine Teilmenge von C, es gilt $B \subseteq C$.

(c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$, $A \cap B = \{1\}$, $A \cup C = \{0, 1, 2, 3\}$, $A \cap C = \{1, 2\}$, $B \cup C = C$, $B \cap C = B$.

(d) $A \setminus B = \{2, 3\}$, $A \setminus C = \{3\}$, $B \setminus A = \{0\}$, $B \setminus C = \emptyset$, $C \setminus A = \{0\}$, $C \setminus B = \{2\}$.

P2.2. Funktionen

Sei $M = \{1, 2\}$ und $N = \{1, 2, 3\}$.

(a) Wieviele Funktionen $f : M \to N$ gibt es? Wieviele davon sind injektiv, bzw., surjektiv?

(b) Wieviele Funktionen $f : N \to M$ gibt es? Wieviele davon sind injektiv, bzw., surjektiv?

(c) Wieviele Funktionen $f : M \to M$ gibt es? Wieviele davon sind bijektiv?

(d) Wieviele Funktionen $f : N \to N$ gibt es? Wieviele davon sind bijektiv?

Lösung:

(a) Jedem der zwei Elemente von M muss ein beliebiges der drei Elemente aus N zugeordnet werden, es gibt also $3 \cdot 3 = 9$ Funktionen von M nach N.
Damit die Funktion injektiv ist, gibt es drei Möglichkeiten der 1 einen Wet zuzuordnen, aber nur zwei Möglichkeiten der 2 einen der verbleibenden Werte in N zuzuordnen, also insgesamt $3 \cdot 2 = 6$.
Da N mehr Elemente enthält als M gibt es keine solche surjektive Funktion.

(b) Jedem der drei Elemente von N muss eines der zwei Elemente aus M zugeordnet werden, es gibt also $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ Funktionen von N nach M.
Es kann keine injektive Funktion geben.
Surjektiv sind nur die beiden konstanten Funktionen $N \ni x \mapsto 1 \in M$ und $N \ni x \mapsto 2 \in M$ nicht, also gibt es davon 6.

(c) Es gibt $2^2 = 4$ Funktionen von M nach M, zwei davon sind bijektiv, nämlich id_M und $(1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 1)$.

(d) Es gibt $3^3 = 27$ Funktionen von N nach N. Sechs davon sind bijektiv, nämlich genau diejenigen, die einer der sechs Permutationen von "123" entsprechen: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

P2.3. Bilder und Urbilder

Sei $f : M \to N$ eine beliebige Funktion. Zeigen Sie für $A, B \subseteq M$:

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ (b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Geben Sie ein Beispiel an, für das $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ gilt.

LÖSUNG:

(a) Um die Gleichheit der beiden Mengen zu zeigen, zeigt man zunächst:
$f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$: Sei $y \in f(A \cup B)$. Dann gibt es ein $x \in A \cup B$ mit $y = f(x)$. Es ist also entweder $x \in A$, dann ist $y \in f(A)$, oder $x \notin A$. Dann ist aber $x \in B$ und damit $y \in f(B)$. Insgesamt folgt also $y \in f(A) \cup f(B)$.

Jetzt zeigt man noch die andere Inklusion:
$f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$: Sei $y \in f(A) \cup f(B)$.
1. Fall: y ist in $f(A)$. Dann gibt es ein $x \in A$, so dass $f(x) = y$ ist und damit folgt wegen $x \in A \cup B$ auch $y \in f(A \cup B)$.
2. Fall: $y \notin f(A)$. Dann ist $y \in f(B)$. Es gibt also ein $\tilde{x} \in B$, so dass $f(\tilde{x}) = y$ ist, wegen $\tilde{x} \in A \cup B$ also auch wieder $y \in f(A \cup B)$.

(b) Die eine Richtung geht genauso wie in (a):
Beh.: $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$: Sei $y \in f(A \cap B)$. Dann gibt es ein $x \in A \cap B$ mit $y = f(x)$. Es ist also $x \in A$ und $x \in B$. Damit ist $y \in f(A)$ und $y \in f(B)$. Insgesamt folgt also $y \in f(A) \cap f(B)$.

Das einfachste Beispiel hierfür ist wohl:
Wähle $M = \{1, 2\}$, $N = \{3\}$, $f : M \ni x \mapsto 3 \in N$ und $A = \{1\}$, $B = \{2\}$. Dann ist $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset \neq \{3\} = f(A) \cap f(B)$.

Hausaufgaben

H2.1. Potenzmengen und kartesisches Produkt

Geben Sie jeweils die folgenden Mengen an, wobei $A = \{3, 4, 5\}$ und $B = \{A, 6\}$ ist.

(a) $\mathcal{P}(A)$ (b) $\mathcal{P}(B)$ (c) $\mathcal{P}(\emptyset)$ (d) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

(e) $A \times A$ (f) $A \times B$ (g) B^3 (h) $A \times \emptyset$

LÖSUNG:

(a) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{3,4,5\}\}$ mit $2^3 = 8$ Elem., da $|A| = 3$.

(b) $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{A\}, \{6\}, B\}$ mit $2^2 = 4$ Elementen, da $|B| = 2$.

(c) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

(d) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(e)
$$A \times A = \{(3,3), (3,4), (3,5),\\ (4,3), (4,4), (4,5),\\ (5,3), (5,4), (5,5)\}$$

(f) $A \times B = \{(3, A), (4, A), (5, A), (3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$

(g) $B^3 = \{(A, A, A), (A, A, 6), (A, 6, A), (A, 6, 6), (6, A, A), (6, A, 6), (6, 6, A), (6, 6, 6)\}$

(h) $A \times \emptyset = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in \emptyset\} = \emptyset$.

H2.2. Mengen und Funktionen

Gegeben sind die Mengen $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 < x \leq 1\}$. Skizzieren Sie die folgenden Mengen in geeigneter Weise

(a) A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$.

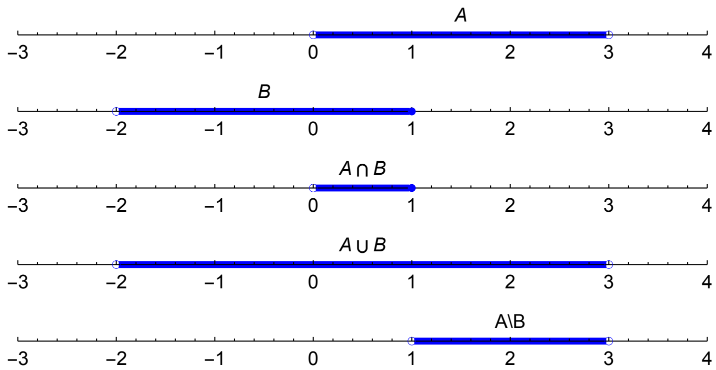
(b) $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$.

(c) Die Graphen der Funktionen $f, g : A \to B$, wobei $f(x) = x - 2$, $g(x) = 1 - \frac{3}{2}(x-1)^2$. Sind diese Funktionen injektiv, bzw., surjektiv?

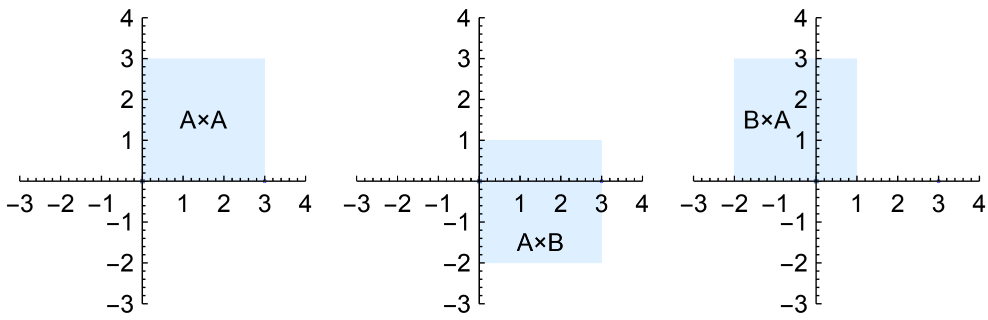
(d) Geben Sie eine bijektive Funktion von A nach $B \setminus \{0\}$ an.

Lösung:

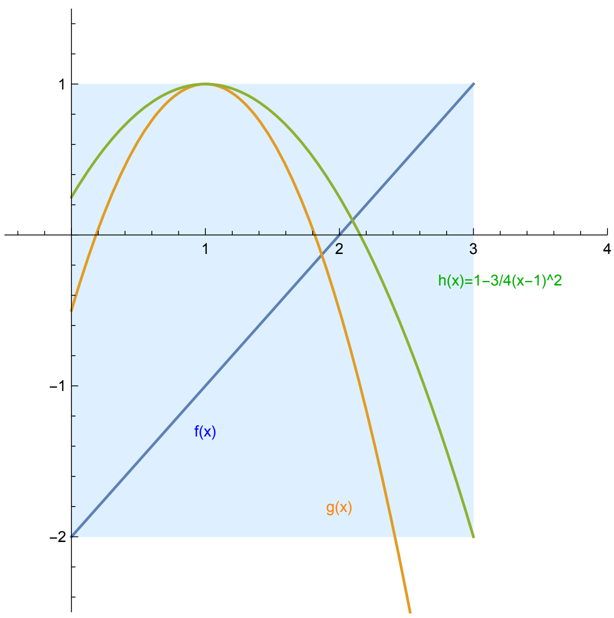
(a)



(b)



(c)



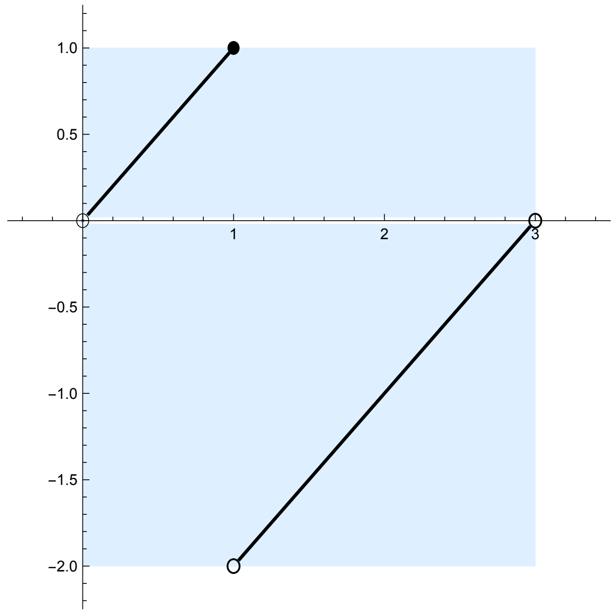
Wir betrachten zusätzlich die Funktion $h(x) = 1 - \frac{3}{4}(x-1)^2$.

f ist injektiv, denn für jedes $y \in B$ gibt es höchstens einen Schnittpunkt des Graphen mit der Geraden $\{(x, y) \,|\, x \in A\} \subseteq A \times B$, aber nicht surjektiv, da $y = 1$ kein Urbild hat.

g ist keine Funktion von A nach B, da z.B., $g(\frac{5}{2}) = -\frac{19}{8} \notin B$.

h dagegen ist surjektiv, zu jedem $y \in B$ gibt es ein Urbild, insbesondere ist $h^{-1}(\{1\}) = \{1\}$, aber nicht injektiv, da $h(\frac{1}{2}) = h(\frac{3}{2})$.

(d) Die Funktion $\tilde{f}(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ x-3 & \text{für } 1 < x < 3, \end{cases}$ geht von A nach $B \setminus \{0\}$ und ist bijektiv.



H2.3. Elementare Beweismethoden

Zeigen Sie die folgenden Aussagen analog zur Vorlesung:

(a) Ist $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar, dann ist auch n^2 durch 3 teilbar.

(b) Ist $n \in \mathbb{N}$ und n^2 durch 3 teilbar, dann ist auch n durch 3 teilbar.

(c) Für alle $p, q \in \mathbb{N}$ gilt $p^2 \neq 3q^2$ (d.h., $\sqrt{3}$ ist irrational).

Hinweis: $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann nicht durch 3 teilbar, wenn es ein $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gibt, so dass $n = 3k + 1$ oder $n = 3k + 2$.

Lösung:

(a) Direkter Beweis:

n ist durch 3 teilbar
$\Longrightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 3k$
$\Longrightarrow n^2 = (3k)^2 = 3 \cdot (3k^2)$
$\Longrightarrow n^2$ ist durch 3 teilbar.

(b) Indirekter Beweis:

n ist nicht durch 3 teilbar
$\Longrightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = 3k + j$, wobei $(j = 1) \vee (j = 2)$
$$\Longrightarrow n^2 = (3k+j)^2 = 9k^2+6kj+j^2 = 3(3k^2+2kj)+j^2 = \begin{cases} 3(3k^2 + 2kj) + 1 & \text{falls } j = 1, \\ 3(3k^2 + 2kj + 1) + 1 & \text{falls } j = 2 \end{cases}$$
$\Longrightarrow n^2$ ist nicht durch 3 teilbar.

(c) Widerspruchsbeweis:

Wir nehmen an, es gibt $p, q \in \mathbb{N}$, für die $p^2 = 3q^2$ gilt. Dann können wir vollständig kürzen und erhalten die teilerfremden $\tilde{p} = \frac{p}{\mathrm{ggT}(p,q)}$ und $\tilde{q} = \frac{q}{\mathrm{ggT}(p,q)}$, für die immer noch $\tilde{p}^2 = 3\tilde{q}^3$ gilt. Dies bedeutet, dass $\tilde{p}^2$ durch 3 teilbar ist, nach (b) ist also auch $\tilde{p}$ durch 3 teilbar, $\tilde{p} = 3k$. Dann ist aber $9k^2 = 3\tilde{q}^2$, bzw., $3k^2 = \tilde{q}^2$. Also ist $\tilde{q}^2$ und damit auch $\tilde{q}$ durch 3 teilbar. Damit sind aber $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ nicht teilerfremd. Ein Widerspruch.