Präsenzaufgaben

P1.1. Alltagslogik

Formalisieren Sie die folgende "Bauernregel" mit Hilfe der Aussagenlogik und zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, dass sie eine Tautologie ist:

Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, dann ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist.

Lösung:

Sei A die Aussage "Der Hahn kräht auf dem Mist" und B die Aussage "Das Wetter bleibt wie es ist". Dann bedeutet $\neg B$ die Aussage "Das Wetter ändert sich". Die gesamte Aussage kann damit durch die Formel

$$A \Longrightarrow (\neg B \vee B)$$

ausgedrückt werden. Die Wahrheitstafel ergibt

A	B	$\neg B$	$\neg B \vee B$	$A \Longrightarrow (\neg B \vee B)$
f	f	w	w	w
f	w	f	w	w
w	f	w	w	w
w	w	f	w	w

P1.2. Tautologien

Beweisen Sie mit der Methode der Wahrheitstafeln, dass folgende Aussagen Tautologien sind. Dabei sind A, B und C beliebige Aussagen.

(a) $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)$

(b) $(A \Longleftrightarrow B) \Longleftrightarrow (A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$

(c) $(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) \Longleftrightarrow (A \wedge B \Longrightarrow C)$

Lösung:

Für (a) und (b) lauten die Wahrheitstafeln

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Longrightarrow B$	$\neg B \Longrightarrow \neg A$	$B \Longrightarrow A$	$(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$	$A \Longleftrightarrow B$
f	f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	w	f	w	w	f	f	f
w	f	f	w	f	f	w	f	f
w	w	f	f	w	w	w	w	w

In der 5. und 6. Spalte kann man die Äquivalenz für (a) ablesen, in der 8. und 9. Spalte die Äquivalenz für (b). Für (c) gilt

A	B	C	$B \Longrightarrow C$	$A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)$	$A \wedge B$	$A \wedge B \Longrightarrow C$
f	f	f	w	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w
f	w	f	f	w	f	w
f	w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w
w	w	f	f	f	w	f
w	w	w	w	w	w	w

Die Ausdrücke in der 4. und der 6. Spalte sind also auch logisch äquivalent, woraus (c) folgt.

P1.3. Alltagslogik II

Formalisieren Sie die Aussage *Es ist nicht alles Gold was glänzt* prädikatenlogisch. Welcher der folgenden Sätze entspricht dieser Aussage, bzw., ist die Verneinung davon?

(a) *Es gibt Gold, das nicht glänzt.*

(b) *Alles was glänzt ist Gold.*

(c) *Es gibt Glänzendes, das nicht aus Gold ist.*

(d) *Alles Gold glänzt nicht.*

LÖSUNG:

Wir betrachten das Universum aller Dinge. x steht also für irgendein Ding. Die Aussageform "x ist aus Gold" sei mit $G(x)$ abgekürzt, die Aussageform "x glänzt" wollen wir mit $g(x)$ abkürzen.
Die Aussage *Es ist nicht alles Gold was glänzt* meint eigentlich
Es ist nicht der Fall, dass jedes x, das glänzt auch aus Gold ist oder
Es ist nicht der Fall, dass aus "x glänzt" schon "x ist aus Gold" folgt.
In der Prädikatenlogik können wir das schreiben als

$$(*) \quad \neg\forall x : (g(x) \Longrightarrow G(x))$$

Genauso können wir die Aussagen (a) bis (d) formalisieren:

(a) $\exists x : (G(x) \wedge \neg g(x))$

(b) $\forall x : (g(x) \Longrightarrow G(x))$

(c) $\exists x : (g(x) \wedge \neg G(x))$

(d) $\forall x : (G(x) \Longrightarrow \neg g(x))$

Offensichtlich ist (b) die Negation von $(*)$.
Intuitiv bedeutet (c) das gleiche wie $(*)$. Wir wollen das erläutern:
Laut Vorlesung ist $(*)$ äquivalent zu $\exists x : \neg(g(x) \Longrightarrow G(x))$, dieses ist wiederum, unter Benutzung der Tautologie H1.1(b), äquivalent zu $\exists x : (g(x) \wedge \neg G(x))$, also (c).

Hausaufgaben

H1.1. Tautologien

Beweisen Sie mit der Methode der Wahrheitstafeln, dass folgende Aussagen Tautologien sind. Dabei sind A, B und C beliebige Aussagen.

(a) $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A \vee B)$

(b) $\neg(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow A \wedge \neg B$

(c) $\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(d) $\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$

(e) $(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) \Longleftrightarrow (A \wedge B \Longrightarrow C)$

(f) $(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) \Longrightarrow ((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C))$

LÖSUNG:

(a) und (b): Die Wahrheitstafel lautet

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Longrightarrow B$	$\neg A \vee B$	$\neg(A \Longrightarrow B)$	$A \wedge \neg B$
f	f	w	w	w	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f	f
w	f	f	w	f	f	w	w
w	w	f	f	w	w	f	f

Die Spalten für $(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg A \vee B)$ und $\neg(A \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow A \wedge \neg B$ kann man weglassen, da die rechte und die linke Seite der behaupteten Äquivalenz jeweils die selben Wahrheitswerte annimmt.

(c) und (d)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
f	f	w	w	f	w	w	f	w	w
f	w	w	f	w	f	f	f	w	w
w	f	f	w	w	f	f	f	w	w
w	w	f	f	w	f	f	w	f	f

(e)

A	B	C	$B \Longrightarrow C$	$A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)$	$A \wedge B$	$A \wedge B \Longrightarrow C$
f	f	f	w	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w
f	w	f	f	w	f	w
f	w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w
w	w	f	f	f	w	f
w	w	w	w	w	w	w

Die Ausdrücke in der 4. und der 6. Spalte sind also logisch äquivalent.

(f)

A	B	C	$A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longrightarrow C$	$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$
f	f	f	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
w	f	w	w	f	w	w
w	w	f	f	w	f	f
w	w	w	w	w	w	w

Die dritte Spalte kann man aus (e) ablesen. Da die dritte und die letzte Spalte identisch sind, erhalten wir sogar, dass

$$(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) \Longleftrightarrow ((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C))$$

eine Tautologie ist. Aus P1.2 (b) kann man aber ablesen, dass dann sowohl

$$(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) \Longrightarrow ((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C))$$

als auch

$$(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)) \Longleftarrow ((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C))$$

jeweils Tautologien sind.

H1.2. Alltagslogik III

Es gibt drei Verdächtige für den Raub eines Lutschers im Süßwarenladen: A, B und C. Genau einer von ihnen hat den Lutscher gestohlen. Beim Verhör sagen Sie folgendes aus:
A: *Ich war es nicht. Außerdem war ich gar nicht am Tatort.*
B: *Ich war es nicht. Außer mir war auch noch* C *am Tatort.*
C: *Ich war es nicht. Der Dieb ist* A. B *war nicht am Tatort.*
Finden Sie unter der Annahme, dass die Unschuldigen die Wahrheit gesagt haben, den Dieb! Wer war am Tatort, wer nicht? Hat der Dieb gelogen?

LÖSUNG:

Wir formalisieren die Aussagen der drei Personen durch Aussagenformen:
$D(x)$ stehe für "x ist der Dieb",
$T(x)$ stehe für "x war am Tatort".
Hierbei ist x eine Variable die für A, B oder C steht (Das Universum besteht hier nur aus den drei Verdächtigen). Damit lauten die drei Zeugenaussagen:
ZA: $\neg D(\mathrm{A}) \wedge \neg T(\mathrm{A})$
ZB: $\neg D(\mathrm{B}) \wedge T(\mathrm{B}) \wedge T(\mathrm{C})$
ZC: $\neg D(\mathrm{C}) \wedge D(\mathrm{A}) \wedge \neg T(\mathrm{B})$
ZB und ZC köinnen nicht beide wahr sein, da sie sich bei $T(\mathrm{B})$ widersprechen. Also muss ZA wahr sein. Es gilt also $\neg D(\mathrm{A})$, A ist nicht der Dieb. somit ist ZC falsch, C lügt also, und nach Voraussetzung muss er auch der Dieb sein.
Da A und B die Wahrheit sagen waren B und C am Tatort, A dagegen nicht.
Dass der Dieb C gelogen hat haben wir auch schon gesehen.