Prof. Dr. M. Wolf
Dr. S. Kaniber
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)
www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2021W

Wintersem. 2021/22
Lösungsblatt 5
(18.11.2021)

Zentralübung

Z5.1. Potenzreihenentwicklungssatz für Potenzreihen

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ein Potenzreihe mit, $a_n \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R > 0$. Man begründe:

(a) f ist auf $\mathrm{B}_R(z_0)$ definiert und stetig.

(b) f ist in z_0 komplex differenzierbar und $f'(0) = a_1$.

(c) Für $w_0 \in \mathrm{B}_R(z_0)$ gibt es $b_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $z \in \mathrm{B}_{R-|w_0-z_0|}(w_0)$ gilt:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-w_0)^k.$$

(d) Folgern Sie, dass f auf $\mathrm{B}_R(z_0)$ holomorph ist mit $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$.

Lösung:

(a) In Analysis 1 wurde bei der Einführung der Potenzreihen gezeigt, dass explizit gilt:

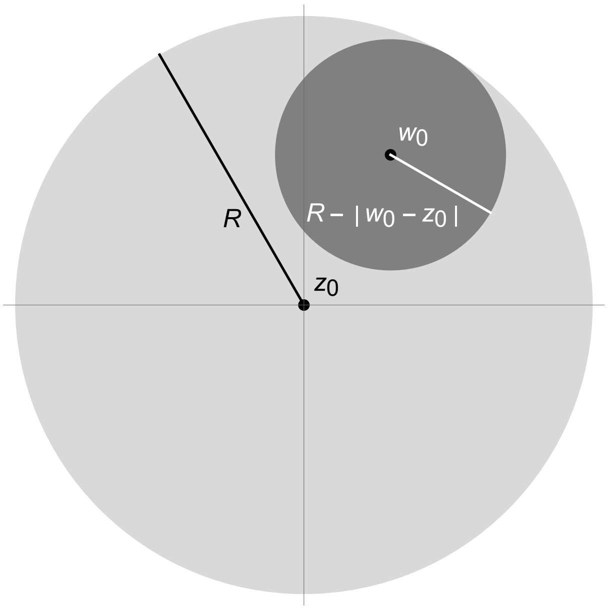
$$R = \big(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\big)^{-1} \qquad \text{(Cauchy-Hadamard-Formel)},$$

und dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für $|z-z_0| < R$ **absolut** konvergiert, für $|z-z_0| > R$ hingegen divergiert.
Weiter wurde bei der Behandlung der gleichmäßigen Konvergenz gezeigt, dass die Funktionenfolge der Teilsummen $z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$ für alle $r < R$ auf $\overline{\mathrm{B}_r(z_0)}$ gleichmäßig konvergiert. Die Grenzfunktion f ist also stetig auf $\mathrm{B}_R(z_0)$.

(b) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $z_0 = 0$. Dann gilt

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - a_0\Big) = \lim_{z\to 0} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}}_{=:g(z)} = a_1,$$

da g den selben Konvergenzradius wie f hat, bei $z = 0$ also stetig ist und somit $\lim_{z\to 0} g(z) = g(0) = a_1$ gilt.



(c) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir wieder $z_0 = 0$. Dann gilt (siehe Abb.) für $z \in \mathrm{B}_{R-|w_0|}(w_0)$ (d.h. $|z - w_0| < R - |w_0|$):

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - w_0 + w_0)^n \overset{\text{Binom.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w_0^{n-k}(z - w_0)^k \\
&\overset{\text{Distr.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n w_0^{n-k}(z - w_0)^k \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n w_0^{n-k}}_{=:b_k}(z - w_0)^k \\
&\overset{(**)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - w_0)^k.
\end{aligned}$$

$(*)$ Man überzeuge sich, dass in beiden Doppelsummen exakt die selben Summanden auftauchen. Die Reihenfolge der Summanden spielt bei absoluter Konvergenz keine Rolle. Hier ist sie gegeben, denn

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \left|\binom{n}{k} a_n w_0^{n-k}(z - w_0)^k\right| &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |w_0|^{n-k}|z - w_0|^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(\underbrace{|w_0| + |z - w_0|}_{<R})^n < \infty.
\end{aligned}$$

$(**)$ Da die gesamte Doppelsumme somit absolut konvergent ist, sind auch die Teilsummen

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n w_0^{n-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} a_{m+k} w_0^m$$

für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ absolut konvergent.

(d) Sei $w_0 \in \mathrm{B}_R(z_0)$. Nach (c) ist $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(z - w_0)^k$ und diese Potenzreihe hat mindestens den Konvergenzradius $R - |w_0 - z_0|$. Nach (b) ist f also in w_0 komplex differenzierbar mit $f'(w_0) = b_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n w_0^{n-1}$.

Z5.2. Homotopie und einfach zusammenhängende Mengen

Zeigen Sie:

(a) Die Kurve $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist nullhomotop in $\mathbb{C}$.

(b) Jede sternförmige Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

(c) Die Kurve $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht nullhomotop.

(d) Die Menge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

LÖSUNG:

(a) Wir wählen für $F \in C([0,1] \times [0, 2\pi], \mathbb{C})$ die Funktion $F(s,t) = (1-s)e^{\mathrm{i}t}$. Dann gilt $F(0,t) = e^{\mathrm{i}t} = \gamma(t)$ und $F(1,t) = 0 \in \mathbb{C}$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Also ist γ null-homotop.

(b) Sei $U \subset \mathbb{C}$ sternförmig mit Zentrum $z_0 \in U$. Zunächst ist U zusammenhängend, da wegzusammenhängen (zwei Punkte sind immer mit dem Umweg über das Zentrum verbunden). Sei $\gamma : [0,1] \to U$ ein geschlossener Weg. Dann ist die Funktion $F(s,t) = (1-s)(\gamma(t) - z0) + z_0$ stetig auf $[0,1] \times [0,1]$ mit Bildern in U und $F(0,t) = \gamma(t)$ und $F(1,t) = z_0$ für alle $t \in [0,1]$. Also ist U einfach zusammenhängend.

(c) Wäre γ null-homotop in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, so müsste nach dem Satz von Cauchy-Goursat für jede auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion f gelten, dass $\oint\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ ist. Wir wissen aber schon, dass dies für $f(z) = \frac{1}{z}$ nicht gilt, obwohl f auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist:

$$\oint\limits_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

Also kann γ nicht null-homotop sein.
ANMERKUNG: Dies zeigt auch, dass $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine holomorphe Stammfunktion besitzt. (Der Hauptzweig des Logarithmus als holomorphe Funktion ist z.B. nur auf dem sternförmigen $\mathbb{C}^-$ definiert.)

(d) Wäre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend, so müsste dort auch $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, null-homotop sein. Mit (c) folgt also: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist *nicht* einfach zusammenhängend.

Z5.3. Komplexe Wegintegrale

Sei γ eine Kurve entlang des Randes von $G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z, |z| < 2\}$.

Berechnen Sie (a) $\oint_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z$, (b) $\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z+1}$ und (c) $\oint_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\cos z}}{z+1}\mathrm{d}z$.

LÖSUNG:

Die Kurve γ wird zusammengesetzt aus
$\gamma_1 = t$, $t \in [0,2]$, $\dot{\gamma}_1(t) = 1$,
$\gamma_2(t) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\dot{\gamma}_2(t) = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$,
$\gamma_3 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(1-t)$, $t \in [0,1]$. Wegen der Parametrisierungsinvarianz des Kurvenintegrals gilt

$$\oint\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z =: \int\limits_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z.$$

Zur Erleichterung der folgenden Rechnung defineren wir
$\gamma_4(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}t$, $t \in [0,2]$, $\dot{\gamma}_4(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Diesmal gilt

$$\int\limits_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = -\int\limits_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z =: \int\limits_{-\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z.$$

Somit gilt

(a)

$$\oint\limits_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_4} \bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^2 t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t - \int_0^2 e^{-i\frac{\pi}{4}} t e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{d}t = 2 + \mathrm{i}\pi - \int_0^2 t\mathrm{d}t = \mathrm{i}\pi.$$

(b) $z \mapsto \ln(z+1)$ ist Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z+1}$, z.B. auf $U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > -1\}$ und $\partial G \subseteq U$. Somit ist das geschlossene Kurvenintegral $\oint_\gamma \frac{1}{z+1}\mathrm{d}z = 0$.

(c) Hier kann eine Stammfunktion nicht explizit angegeben werden. Dennoch gilt

$$\oint_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\cos z}}{z+1}\mathrm{d}z = 0 \quad \text{wegen Cauchy-Integralsatz, da Integrand holomorph auf } \{\mathrm{Re}(z) > -1\}.$$

Präsenzaufgaben

P5.1. Komplexer Sinus und Cosinus

$\cos z = \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z})$, $\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z})$ für $z \in \mathbb{C}$ definiert den komplexen Cosinus und Sinus. Entsprechend setzt man $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ und $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ für $z \in \mathbb{C}$. Hinweis: Benutzen Sie die Funktionalgleichung $e^z e^w = e^{z+w}$ für $w, z \in \mathbb{C}$ und die bekannten Eigenschaften der reellen Winkelfunktionen.

(a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Additionstheoreme für komplexe Argumente.

(b) Es gilt $\cos \mathrm{i}z = \cosh z$, $\sin \mathrm{i}z = \mathrm{i}\sinh z$.

(c) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\exp, \cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(d) Welche Möglichkeiten gibt es, $\sin' z = \cos z$ und $\cos' z = -\sin z$ zu beweisen?

(e) Bestimmen Sie alle Nullstellen von exp, sin und cos mit Vielfachheit.

Lösung:

(a) $\cos z \cos w - \sin z \sin w = \frac{1}{4}(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z})(e^{\mathrm{i}w} + e^{-\mathrm{i}w}) + \frac{1}{4}(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z})(e^{\mathrm{i}w} - e^{-\mathrm{i}w})$
$= \frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}(z+w)} + e^{-\mathrm{i}(z+w)}) = \cos(z+w)$,
$\sin z \cos w + \cos z \sin w = \sin(z+w)$ analog.

(b) $\cos \mathrm{i}z = \frac{1}{2}(e^{-z} + e^z) = \cosh z$, $\sin \mathrm{i}z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{-z} - e^z) = \mathrm{i}\frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \mathrm{i}\sinh z$,

(c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist
$\exp(x + \mathrm{i}y) = \exp(x)\exp(\mathrm{i}y) = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$,
$\cos(x + \mathrm{i}y) = \cos x \cos \mathrm{i}y - \sin x \sin \mathrm{i}y = \cos x \cosh y - \mathrm{i}\sin x \sinh y$,
$\sin(x + \mathrm{i}y) = \sin x \cos \mathrm{i}y + \cos x \sin \mathrm{i}y = \sin x \cosh y + \mathrm{i}\cos x \sinh y$.

(d) (i) Elementar: $\sin' z = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(z+h) - \sin z}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin z(\cos h - 1) + \sin h}{h} = \cos z$, wobei nur $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ und $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$ benutzt wurde.
(ii) Durch Nachweis der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen.
(iii) Mit der Definition, $\exp'(z) = \exp(z)$ und den Differentiationsregeln.
(iv) Über die Potenzreihen und ihre gliedweisen Ableitungen.
(v) Mit dem Identitätssatz: $\sin'$ ist ganze Funktion mit $\sin'(x) = \cos(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Also ist $\sin' = \cos$ auf ganz $\mathbb{C}$.

(e) Da $\exp(z)\exp(-z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$, folgt, dass exp keine Nullstellen in $\mathbb{C}$ besitzt.
$\sin z = 0$ mit $z = x + \mathrm{i}y$ impliziert

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Re}\,\sin(x + \mathrm{i}y) = \sin x \cosh y, \\ 0 &= \mathrm{Im}\,\sin(x + \mathrm{i}y) = \cos x \sinh y. \end{aligned}$$

Da $\cosh y \geq 1$ folgt aus der ersten Gleichung $\sin x = 0$, bzw., $x \in \pi\mathbb{Z}$. Nun gilt aber $\cos \pi n = (-1)^n \neq 0$ für $n \in \mathbb{Z}$. Daher folgt aus der zweiten Gleichung $\sinh y = 0$, bzw., $y = 0$. $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat also genau die Nullstellen $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Diese sind alles einfache Nullstellen, da $\sin'(n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n \neq 0$ ist.
Wegen $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \sin z \cos \frac{\pi}{2} + \cos z \sin \frac{\pi}{2} = \cos z$ ist die Nullstellenmenge des cos gleich $\pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}$. Auch diese sind alle einfach.

P5.2. Kurvenintegrale

(a) Berechnen Sie $\oint\limits_{|z|=R} z^n \mathrm{d}z$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Berechnen Sie $\oint\limits_{|z|=R} \overline{z}^n \mathrm{d}z$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Warum kann $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion haben?

LÖSUNG:

(a) $\gamma(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\oint_{|z|=R} z^n \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t = \mathrm{i}R^{n+1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t} \mathrm{d}t = \begin{cases} \mathrm{i}R^{n+1} \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{\mathrm{i}(n+1)}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{für } n \neq -1, \\ 2\pi\mathrm{i} & \text{für } n = -1, \end{cases}$$

Für $n \neq -1$ kann man natürlich auch mit der Existenz einer Stammfunktion von $z \mapsto z^n$, nämlich $F : z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, argumentieren: $\oint_{|z|=R} z^n \mathrm{d}z = F(1) - F(1) = 0$.

(b) $\oint_{|z|=R} \overline{z}^n \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} (R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})^n \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t = \mathrm{i}R^{n+1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)t} \mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}\, R^2 \delta_{n,1}$.

(c) Wäre $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z}$, so würde für $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$ gelten:

$$0 = F(1) - F(1) = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = \oint_\gamma F'(z) \mathrm{d}z = \oint_\gamma \frac{1}{z} \mathrm{d}z \overset{(a)}{=} 2\pi\mathrm{i}.$$

Widerspruch.

P5.3. Potenzreihen gebrochen rationaler Funktionen

Bestimmen Sie Potenzreihenentwicklung und Konvergenzradius von

(a) $\frac{1}{z-a}$ im Punkt $y \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{C}$,

(b) $\frac{1}{1+z^2}$ im Punkt $y \in \mathbb{C} \setminus \{\pm\mathrm{i}\}$,

LÖSUNG:

(a) $$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-y)+(y-a)} = \frac{1}{y-a} \frac{1}{1 - \frac{y-z}{y-a}} = \frac{1}{y-a} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{y-z}{y-a}\right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(y-a)^{n+1}} (z-y)^n.$$

Bestimmung des Konvergenzradius: Alternative

(i) Explizit: Absolute Konvergenz besteht genau dann, wenn $|z - y| < |a - y|$. Der Konvergenzradius ist also $|y - a|$.

(ii) Abstrakt: Das Korollar zum Potenzreihenentwicklungssatz garantiert, dass der Konvergenzradius größer gleich $|y-a|$ ist, das ist der Abstand des Entwicklungspunktes zum Rand $\{a\}$ des Definitionsbereiches der holomorphen Funktion. Der Konvergenzradius ist kleiner gleich $|y - a|$, sonst wäre $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ bei a stetig forsetzbar, insbesondere also beschränkt, was nicht der Fall ist.

(b) $$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} \overset{\text{PBZ}}{=} \frac{1}{2\mathrm{i}(z-\mathrm{i})} - \frac{1}{2\mathrm{i}(z+\mathrm{i})} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(y-z)^n}{(y-\mathrm{i})^{n+1}} - \sum_{n \geq 0} \frac{(y-z)^n}{(y+\mathrm{i})^{n+1}} \right)$$

$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\frac{1}{(y-\mathrm{i})^{n+1}} - \frac{1}{(y+\mathrm{i})^{n+1}} \right) (y-z)^n$. Der Konvergenzradius ist nach (a) gegeben durch $\min\{|y-\mathrm{i}|, |y+\mathrm{i}|\}$, was durch einzeichnen in der komplexen Ebene sofort einleuchtet, da die Konvergenzscheibe genau bis zur ersten auftretenden Singularität reicht.