TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. S. Kaniber
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2021W

Wintersem. 2021/22
Lösungsblatt 4
(11.11.2021)

Zentralübung

Z4.1. Fluss eines Vektorfeldes durch ein Flächenstück

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ das durch die beiden Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ aufgespannte Parallelogramm mit dem bezüglich v_1, v_2 rechtshändigen Normalenvektorfeld v_A. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das konstante Vektorfeld $F(x) = F_0 \in \mathbb{R}^3$. Begründen Sie, dass der Fluss des Vektorfeldes F durch das Flächenstück A, $\Psi_F(A)$, gegeben ist durch

$$\Psi_F(A) = \int_A \langle F(x), v_A(x)\rangle \mathrm{dS}(x).$$

Lösung:

Das rechtshändige Normalenvektorfeld von A, $v_A : A \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, ist gegeben durch $v_A(x) = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}$. Der zum Vektorfeld F gehörige Fluss $\Phi_F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist durch die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = F(x)$ gegeben, hier einfach $\Phi_F(t; x) = x + tF_0$. Durch den Fluss überstreicht A im Zeitintervall $[0, t]$ die Menge $V_t = \bigcup_{s\in[0,t]} \Phi_F(s; A)$. Den Fluss durch A entlang des Vektorfeldes F kann man nun definieren als das Volumen, das pro Zeiteinheit durch A "fließt",

$$\Psi_F(A) := \pm \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \mathrm{vol}(V_t)$$

mit $+$, falls $\langle F, v_A\rangle \geq 0$ und $-$, falls $\langle F, v_A\rangle < 0$. V_t ist der von v_1, v_2 und tF_0 aufgespannte Spat, daher gilt $\mathrm{vol}(V_t) = |\det(v_1\ v_2\ tF_0)|$. Wir erhalten

$$\Psi_F(A) = \det(v_1\ v_2\ F_0) = \langle F_0, v_1 \times v_2\rangle = \langle F_0, v_A\rangle \|v_1 \times v_2\|$$

mit dem richtigen Vorzeichen. Für die Parametrisierung von A, $\Psi(r, s) = rv_1 + sv_2$, $r, s \in [0, 1]$ ist die Gramsche Determinante

$$g_\Psi(r, s) = \det(J_\Psi(r, s)^{\mathrm{T}} J_\Psi(r, s)) = \|\partial_r\Psi(r, s) \times \partial_s\Psi(r, s)\|^2 = \|v_1 \times v_2\|^2.$$

Somit ist

$$\Psi_F(A) = \int_{[0,1]^2} \langle F(\Psi(r, s)), v_A(\Psi(r, s))\rangle \sqrt{g_\Psi(r, s)}\, \mathrm{d}(r, s) = \int_A \langle F(x), v_A(x)\rangle \mathrm{dS}(x).$$

Z4.2. Oberflächenintegrale und der Satz von Gauß

Gegeben sei der Kegel $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$ und das Vektorfeld $F(x, y, z) = (x - y, xz, x^2+y^2+z^2)$. Bestätigen Sie den Satz von Gauß explizit.

Lösung:

Wir geben nun jeweils Parametrisierungen für die einzelnen Flächenstücke an.
Kegelmantel: $r \in \,]0,1[$, $\phi \in \,]0,2\pi[$,

$$\Psi(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 2-2r \end{pmatrix}, \quad \partial_r\Psi \times \partial_\phi\Psi = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r\cos\phi \\ 2r\sin\phi \\ r \end{pmatrix}.$$

Kreisscheibe: $r \in \,]0,1[$, $\phi \in \,]0,2\pi[$,

$$\Phi(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_r\Phi \times \partial_\phi\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Beide Normalenfelder zeigen nach oben.

Der Fluss durch den Kegelmantel ist

$$\begin{aligned}
\int_\Psi \langle F, v\rangle \,\mathrm{d}S &= \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \langle F(r\cos\phi, r\sin\phi, 2-2r), \partial_1\Psi(r,\phi) \times \partial_2\Psi(r,\phi)\rangle \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \left\langle \begin{pmatrix} r(\cos\phi - \sin\phi) \\ (2-2r)r\cos\phi \\ r^2 + (2-2r)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2r\cos\phi \\ 2r\sin\phi \\ r \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} d\phi (2r^2\cos^2\phi + 4r + r^3 - 8r^2 + 4r^3) = 2\pi \int_0^1 \mathrm{d}r (4r - 7r^2 + 5r^3) \\
&= 2\pi(4 \cdot \tfrac{1}{2} - 7 \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{4}) = \tfrac{11}{6}\pi.
\end{aligned}$$

Der Fluss durch die Kreisscheibe ist

$$\begin{aligned}
\int_\Phi \langle F, v\rangle \,\mathrm{d}S &= \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \langle F(r\cos\phi, r\sin\phi, 0), \partial_1\Phi(r,\phi) \times \partial_2\Phi(r,\phi)\rangle \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \left\langle \begin{pmatrix} r(\cos\phi - \sin\phi) \\ 0 \\ r^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \right\rangle = 2\pi \int_0^1 dr\, r^3 = \tfrac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Orientierung der durch die Parametrisierungen vorgegebenen Normalenfelder, so erhält man

$$\int_{\partial K} \langle F, v\rangle \,\mathrm{d}S = \int_\Psi \langle F, v\rangle \,\mathrm{d}S - \int_\Phi \langle F, v\rangle \,\mathrm{d}S = \tfrac{11}{6}\pi - \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{4}{3}\pi.$$

Wegen $\operatorname{div} F(x,y,z) = 1 + 2z$ gilt für die Volumenintegrale

$$\int_K \operatorname{div} F \mathrm{d}^3x = \operatorname{vol}(K)(1 + 2z_S) = \tfrac{1}{3} \cdot 2\pi(1 + 2 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot 2) = \tfrac{4}{3}\pi,$$

da das Volumen eines Kegels $\frac{1}{3}$ Grundfläche mal Höhe ist und s_z, die z-Komponente des Kegelschwerpunktes bei $\frac{1}{4}$ der Höhe liegt (nachrechnen!). *Bemerkung:* Die beiden Integrale stimmen überein, was den Gaußschen Integralsatz

$$\int_K \operatorname{div} F \,\mathrm{d}^3x = \int_{\partial K} \langle F, v\rangle \,\mathrm{d}S$$

bestätigt.

Z4.3. Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Es sei $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = z,\ z \in (1/2,1)\}$ ein Teil eines Paraboloids und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (yz, -xz, 1)$. Berechnen Sie $\int_M \langle \operatorname{rot} F, v\rangle \,\mathrm{dS}$ mit Hilfe des Satzes von Stokes, wobei v das stetige Normalenfeld an M ist, das nach außen zeigt.

Lösung:

Es ist $M = \Phi(\Omega)$, wobei die Karte Φ durch $\Phi : \Omega = B_1(0) \setminus \overline{B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)} \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix},$$

gegeben ist. Es ist $\partial M := \Phi(\partial\Omega) = \gamma_1([0,2\pi)) \cup \gamma_2([0,2\pi))$, wobei

$$\gamma_1(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

wobei die Orientierung von ∂M nicht mit der Durchlaufrichtung von γ_1 übereinstimmt.

Die Voraussetzungen des Satzes von Stokes sind erfüllt: Φ lässt sich auf den Definitionsbereich $V := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erweitern und ist eine Karte der C^2-Untermannigfaltigkeit $\Phi(V)$, außerdem ist Ω offen und beschränkt mit C^1-Rand und es gilt $\overline{\Omega} \subset V$. Das Vektorfeld F ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$.
Mit dem Satz von Stokes folgt daher

$$\begin{aligned}
\int_M \langle \operatorname{rot} F, v\rangle \,\mathrm{dS} &\overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial M} F(r)\cdot \mathrm{d}r = -\int_{\gamma_1((0,2\pi))} F(r)\cdot \mathrm{d}r + \int_{\gamma_2((0,2\pi))} F(r)\cdot \mathrm{d}r \\
&= -\int_0^{2\pi} F(\gamma_1(t))\cdot \gamma_1'(t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} F(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin t \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Präsenzaufgaben

P4.1. Das Coulombfeld einer Punktladung

Gegeben ist das Vektorfeld $E(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(a) Berechnen Sie die Divergenz von E.

(b) Berechnen Sie den Fluss von E durch den Rand von $B_R(0)$, $R > 0$.

(c) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt mit glattem Rand, $0 \notin \partial K$. Berechnen Sie $\int_{\partial K} \langle E, v\rangle \mathrm{dS}$ für die beiden Fälle $0 \notin K$ und $0 \in K \setminus \partial K$. Hinweis: Satz von Gauß.

Lösung:

(a) $\operatorname{div} E(x) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i \frac{x_i}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} - \frac{3x_i^2}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{5/2}} \right) = \frac{3}{\|x\|^3} - \frac{3\|x\|^2}{\|x\|^5} = 0.$

(b) Der Satz von Gauß ist nicht anwendbar, da E in $B_R(0)$ nicht stetig differenzierbar ist. Allerdings gilt für das äußere Normalenfeld v für $\|x\| = R$, dass

$$\langle E(x), v(x)\rangle = \|E(x)\| \cdot \|v(x)\| = \frac{1}{R^2},$$

da beide radial nach außen zeigen. Somit ist

$$\int\limits_{\|x\|=R} \langle E, v\rangle \mathrm{d}S = \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi$$

unabhängig von R.

(c) (i) $0 \notin K$. Also $K \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, d.h., E ist stetig differenzierbar auf einer offenen Umgebung von K. Der Satz von Gauß ergibt $\int\limits_{\partial K} \langle E, v\rangle \,\mathrm{dS} = \int\limits_{K} \nabla \cdot E \,\mathrm{d}^3x = 0$.

(ii) Ist $0 \in K \setminus \partial K$, so gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(0) \subseteq K \setminus \partial K$. $K_\epsilon := K \setminus B_\epsilon(0)$ ist wieder kompakt und erfüllt die Vorraussetzungen von (i), also ist $\int\limits_{\partial K_\epsilon} \langle E, v\rangle dS = 0$.

Wegen $\partial K_\epsilon = \partial K \dot\cup \partial B_\epsilon(0)$ allerdings mit nach innen gerichtetem Normalenfeld auf $\partial B_\epsilon(0)$ gilt

$$\int\limits_{\partial K} \langle E, v\rangle \,\mathrm{dS} = \int\limits_{\partial K_\epsilon} \langle E, v\rangle \,\mathrm{dS} + \int\limits_{\partial B_\epsilon(0)} \langle E, v\rangle \,\mathrm{dS} = 4\pi.$$

P4.2. Ein magnetischer Monopol besitzt kein Vektorpotential

Gegeben ist das Vektorfeld $B(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. $A : U \to \mathbb{R}^3$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ offen heißt Vektorpotential von B auf U, wenn $\operatorname{rot} A = B$ gilt. Zeigen Sie, dass B auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ kein Vektorpotential besitzt. Hinweis: Widerspruchsbeweis mit Satz von Stokes für ein geeignetes Flächenstück.

Lösung:

Annahme: Es gibt ein Vektorpotential $A : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ von B, also $B = \operatorname{rot} A$, dann gilt für die nach außen orientierten Halbsphären $S_+ = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, z \geq 0\}$ und $S_- = -S_+$ jeweils der Satz von Stokes

$$\begin{aligned}
\int\limits_{S_+} \langle B, v\rangle \mathrm{dS} &= \int\limits_{\gamma} A(r) \cdot \mathrm{d}r, \\
\int\limits_{S_-} \langle B, v\rangle \mathrm{dS} &= -\int\limits_{\gamma} A(r) \cdot \mathrm{d}r,
\end{aligned}$$

mit der durch γ gegen den Uhrzeigersinn parametrisierten Einheitskreislinie in der xy–Ebene. Aus Symmetriegründen muss jedoch $\int\limits_{S_+} \langle B, v\rangle \mathrm{dS} = \int\limits_{S_-} \langle B, v\rangle \mathrm{dS}$ gelten. Wegen $\int\limits_{S_+} \langle B, v\rangle \mathrm{dS} + \int\limits_{S_-} \langle B, v\rangle \mathrm{dS} = 4\pi$ (Aufgabe P4.1) ist das ein Widerspruch.

P4.3. Die zweite Greensche Formel

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand, äußerem Normalenfeld v und sei $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Die Richtungsableitung von g in $x \in \partial A$ bezüglich dem Vektorfeld v ist definiert als

$$\partial_v g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(x + tv(x))\big|_{t=0}.$$

(a) Überprüfen Sie, dass $\partial_v g(x) = \langle \operatorname{grad} g(x), v(x)\rangle$, kurz $\partial_v g = \langle \nabla g, v\rangle$ gilt.

(b) Man beweise die zweite Greensche Formel

$$\int\limits_{\partial A} (f\partial_v g - g\partial_v f) \,\mathrm{d}S = \int\limits_{A} (f\Delta g - g\Delta f) \mathrm{d}^n x$$

mit Hilfe der ersten Greenschen Formel.

LÖSUNG:

(a) Für stetig differenzierbares g gilt mit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $h(t) = x + tv(x)$,

$$\partial_v g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(x + tv(x))\big|_{t=0} = (g \circ h)'(t) = J_g(h(0))h'(0) = \langle \nabla g(x), v(x) \rangle.$$

(b) Die erste Greensche Formel lautet jeweils unter Verwendung der Notation aus (a)

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial A} f \partial_v g \,\mathrm{d}S &= \int\limits_A (\langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g) \mathrm{d}^n x, \\
\int\limits_{\partial A} g \partial_v f \,\mathrm{d}S &= \int\limits_A (\langle \nabla g, \nabla f \rangle + g \Delta f) \mathrm{d}^n x,
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Gleichung lediglich f und g vertauscht wurden. Die Differenz der beiden Gleichungen ergibt die zweite Greensche Formel.

Hausaufgaben

H4.1. Oberflächenintegrale von Vektorfeldern

Bestätigen Sie für den Paraboloidenstumpf

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$$

und das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) := (x + y, y + z, x + z)$ den Satz von Gauß.

LÖSUNG:

Wir parametrisieren die Bodenkreisfläche K von M durch $\Psi_K : [0, 2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\Psi_K(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0),$$

und die Paraboloidoberfläche P durch $\Psi_P : [0, 2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\Psi_P(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 4 - r^2).$$

Das äußere (unnormierte) Normalenfeld der orientierten Bodenfläche K lautet hier

$$-\partial_r \Psi_K \times \partial_\varphi \Psi_K \quad = \quad -(\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \times (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0) = -(0, 0, r),$$

und das äußere unnormierte Normalenfeld der Paraboloidoberfläche P ist

$$\partial_r \Psi_P \times \partial_\varphi \Psi_P \quad = \quad (\cos \varphi, \sin \varphi, -2r) \times (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0) = (2r^2 \cos \varphi, 2r^2 \sin \varphi, r).$$

Das Flächenintegral über den Boden trägt nichts bei,

$$\begin{aligned}
\int_K \langle F, n \rangle \,\mathrm{d}S &= -\int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ F(r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0) \cdot (\partial_r \Psi_K \times \partial_\varphi \Psi_K) \\
&= -\int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ r^2 \cos \varphi = 0.
\end{aligned}$$

Das Flächenintegral über die Paraboloidoberfläche ergibt dagegen

$$\begin{aligned}
\int_P \langle F, n \rangle \,\mathrm{d}S &= \int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ F(r \cos \varphi, r \sin \varphi, 4 - r^2) \cdot (\partial_r \Psi_P \times \partial_\varphi \Psi_P) \\
&= 2\pi \int_0^2 \mathrm{d}r\ (r^3 + 4r) = 2\pi \left(\frac{2^4}{4} + 4\frac{2^2}{2} \right) = 24\pi.
\end{aligned}$$

Somit ist der Gesamtfluss des Vektorfeldes F durch den Rand des Paraboloidenstumpfes $\displaystyle\int_{\partial M} \langle F, v\rangle \mathrm{d}S = 24\pi$.

Nun berechnen wir die Quellstärke des Vektorfeldes F innerhalb des Paraboloidenstumpfes:

Wir integrieren nun die Divergenz von F über M. Die Divergenz von F lautet $\operatorname{div} F = 3$, und deshalb finden wir

$$\int_M \operatorname{div} F(x,y,z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \ = 3|M| = 3\pi \int_0^4 \mathrm{d}z\, r(z)^2 = 3\pi \int_0^4 \mathrm{d}z\,(4-z) = 24\pi.$$

Dabei bezeichnet $|M|$ das Volumen von M und $r(z) = \sqrt{4-z}$ den Radius des Kreises der entsteht, wenn M mit der Ebene mit konstantem z geschnitten wird. Somit gilt auch hier $\displaystyle\int_M \nabla\cdot F \mathrm{d}^3x = 24\pi$, womit der Satz von Gauß

$$\int_M \operatorname{div} F\, d^3x = \int_{\partial M} \langle F, v\rangle\, \mathrm{dS}$$

in diesem spziellen Fall explizit bestätigt ist.

H4.2. Eine Integralidentität

Sei A ein orientiertes Flächenstück auf das der Satz von Stokes anwendbar ist. Zeigen Sie für $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$\int\limits_{\partial A} f(r)\nabla g(r)\cdot \mathrm{d}r = \int\limits_A \langle \nabla f \times \nabla g, v\rangle\, \mathrm{dS}.$$

Lösung:

Man wendet den Satz von Stokes auf das Vektorfeld $f\nabla g$ an. Dazu berechnet man die Rotation

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot}(f\nabla g))_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk}\partial_j(f\partial_k g) = \sum_{jk}\epsilon_{ijk}\partial_j f\partial_k g + f\sum_{jk}\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k g \\ &= (\nabla f\times\nabla g)_i + (f\nabla\times\nabla g)_i = (\nabla f\times \nabla g)_i,\end{aligned}$$

da $\nabla\times\nabla g = 0$. Also gilt die Behauptung

$$\int\limits_{\partial A} f(r)\nabla g(r)\cdot \mathrm{d}r = \int\limits_A \langle \nabla f \times \nabla g, v\rangle\, \mathrm{dS}.$$

H4.3. Satz von Stokes

Sei $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2-2z=0, z\le 2\}$ mit in positive z-Richtung orientiertem Normalenfeld. Berechnen Sie für das Vektorfeld $F(x,y,z) = (3y, -2xz, yz^2)$ den Fluss der Rotation von F durch A direkt und mittels der Zirkulation von F entlang ∂A über den Satz von Stokes.

Lösung:

Eine Parametrisierung der Fläche A in Polarkoordinaten ist $\Psi(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi, \frac{r^2}{2})$, $r\in[0,2]$, $\phi\in[0,2\pi]$, wobei die problematischen Punkte $r=0$ und $\phi = 0, 2\pi$, eine 2-dimensionale Nullmenge bilden. Das (unnormierte) Normalenfeld ist

$$\partial_1\Psi\times\partial_2\Psi = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ r\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-r\sin\phi\\ r\cos\phi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-r^2\cos\phi\\ -r^2\sin\phi\\ r\end{pmatrix}.$$

Für die Rotation von F ergibt sich

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3y \\ -2xz \\ yz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2+2x \\ 0 \\ -2z-3 \end{pmatrix}.$$

Somit lautet der Fluss von F durch A

$$\begin{aligned}
\int_A \langle \operatorname{rot} F, v\rangle \,\mathrm{dS} &= \int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \begin{pmatrix} \frac{r^4}{4} + 2r\cos\phi \\ 0 \\ -r^2-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r^2\cos\phi \\ -r^2\sin\phi \\ r \end{pmatrix} \\
&= \int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi (-\tfrac{r^6}{4}\cos\phi - 2r^3\cos^2\phi - r^3 - 3r) \\
&= 2\pi \int_0^2 (-r^3 - r^3 - 3r)\mathrm{d}r = -16\pi - 12\pi = -28\pi.
\end{aligned}$$

Der Rand von F wird parametrisiert durch $\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 2)$, $t \in [0, 2\pi]$. Dies ist die richtige Durchlaufrichtung für das nach oben orientierte Flächenstück. Somit erhält man über den Satz von Stokes

$$\begin{aligned}
\int_A \langle \operatorname{rot} F, v\rangle \,\mathrm{dS} &= \int_\gamma F \cdot \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} F(2\cos t, 2\sin t, 2) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 6\sin t \\ -8\cos t \\ 8\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = -28\pi.
\end{aligned}$$