TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

**Zentrum Mathematik**



Prof. Dr. M. Wolf
Dr. S. Kaniber
Dr. M. Prähofer


**Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)**


www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2021W

Wintersem. 2021/22
Blatt 3
(04.11.2021)


## Zentralübung

### Z3.1. Gramsche Determinante und $k$–dimensionales Volumen

Gegeben seien drei linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Das 3-dimensionale Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallotops

$$P = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 : \alpha_i \in [0,1], i = 1,2,3\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

ist laut Vorlesung $\mathrm{vol}_3(P) = \sqrt{\det V^{\mathrm{T}} V}$, wobei $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times 3}$. Begründen Sie diese Definition anschaulich mit Hilfe des Spatprodukts

(a) für $d = 3$,

(b) für $d > 3$ und $v_i \in \mathbb{R}^3 \times \{0\}^{d-3}$,

(c) für $d > 3$ und beliebige $v_i \in \mathbb{R}^d$ durch Rückführung auf (b) mittels einer geeigneten orthogonalen Transformation.

(d) Formulieren Sie eine Verallgemeinerung für $k$ Vektoren im $\mathbb{R}^d$.

### Z3.2. Parametrisierungsinvarianz des Oberflächenintegrals

Seien $\Phi : U \to M$ und $\Psi : V \to M$ zwei lokale Parametrisierungen derselben $k$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M$ des $\mathbb{R}^n$ mit $\Phi(U) = \Psi(V) =: W \subseteq M$ und $f : W \to \mathbb{R}$ stetig und nichtnegativ. Man zeige

$$\int_V f(\Psi(v))\sqrt{g^{\Psi}(v)}\mathrm{d}v = \int_U f(\Phi(u))\sqrt{g^{\Phi}(u)}\mathrm{d}u.$$

### Z3.3. Einfache Beispiele für Oberflächenintegrale

Berechne den Flächeninhalt des Kegelmantels $M = \{(x,y,z) \subseteq \mathbb{R}^3 \,|\, z{=}1{-}\sqrt{x^2{+}y^2}, 0{<}z{<}1\}$

(a) durch Parametrisierung als Graph einer Funktion,

(b) durch Parametrisierung in Zylinderkoordinaten,

(c) durch geometrische Betrachtung.

**Präsenzaufgaben**

**P3.1. Flächeninhalt und 3-dimensionales Volumen im $\mathbb{R}^4$**

(a) Welche Fläche besitzt das von den beiden Vektoren $v_1 = (1,1,1,1)$ und $v_2 = (1,1,1,-1)$ im $\mathbb{R}^4$ aufgespannte Parallelogramm?

(b) Welches dreidimensionale Volumen im $\mathbb{R}^4$ hat der von den drei Vektoren $v_1$, $v_2$ und $v_3 = (1,1,-1,1)$ aufgespannte Spat?

(c) Veranschaulichen Sie die in (a) und (b) betrachteten Mengen.

**P3.2. Oberflächenintegrale**

Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt

(a) des Torus im $\mathbb{R}^3$, $T = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (R - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + x_3^2 = r^2\}$, $0 < r < R$,

(b) des 2-dimensionalen Torus im $\mathbb{R}^4$, $T = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_3^2 + x_4^2 = r^2\}$, $R, r > 0$.

**P3.3. Gramsche Determinante und äußeres Normalenfeld von Flächen im Raum**

Sei $\Psi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, eine $C^1$-Parametrisierung des Flächenstücks $V$ und das Normalenfeld $n : V \to \mathbb{R}^3$ bilde in jedem Punkt $\Psi(u) \in V$ ein Rechtssystem mit den Basisvektoren des Tangentialraums $\partial_1\Psi(u)$, $\partial_2\Psi(u)$. Zeigen Sie

(a) $\sqrt{g(u)} = \|\partial_1\Psi(u) \times \partial_2\Psi(u)\|$,

(b) Für ein stetiges Vektorfeld $F : V \to \mathbb{R}^3$ ist der Fluss von $F$ durch $V$ in Richtung des Normalenfeldes $n$

$$\int_V \langle F, n\rangle \mathrm{dS} = \int_U \langle F(\Psi(u)), \partial_1\Psi(u) \times \partial_2\Psi(u)\rangle \mathrm{d}^2u.$$

**Hausaufgaben**

**H3.1. Flächeninhalt eines Katenoiden**

Berechnen Sie den Flächeninhalt der durch Rotation einer Kettenlinie um die $z$-Achse entstehende Untermannigfaltigkeit $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \cosh z, -1 < z < 1\}$.

**H3.2. Fläche eines Sattels**

Gegeben ist die Fläche $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 - z = 0\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt jeweils von

(a) $A_1 = A \cap \{x^2 + y^2 \leq 2\}$.

(b) $A_2 = A \cap \{|x| \leq 1 \text{ und } |y| \leq 1\}$ (Reduzieren Sie auf ein Einfachintegral, welches z.B. per Computeralgebra-Programm und/oder numerisch ausgewertet werden soll),

(c) $A_3 = A \cap \{|x| + |y| \leq \sqrt{2}\}$,

Als Parametrisierungen stehen zur Auswahl: $(x, y)$ oder $(u, v)$ mit $u = x + y$, $v = x - y$ oder $(r, \phi)$ mit $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. Benutzen Sie $\int \frac{1}{\sqrt{c+t^2}}\mathrm{d}t = \ln(t + \sqrt{c + t^2}) + C$.

**H3.3. Flächeninhalt der $d$–Sphäre**

Berechnen Sie das $d$–dimensionale Volumen $A_d$ der $d$–Sphäre $S^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|x\| = 1\}$ im $\mathbb{R}^{d+1}$ mit Hilfe des Graphen von $f(y) = \sqrt{1 - \|y\|^2}$, $y \in \mathbb{R}^d$, $\|y\| < 1$.

Hinweis: Man verwende $\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pi$ für $a > 0$ und führe auf das $(d-1)$-dimensionale Kugelvolumen aus H2.3 zurück.

**Hausaufgabenabgabe:** Montag, 15.11.2021, bis 8:00 in Moodle, maximal zu zweit