TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. S. Kaniber
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2021W

Wintersem. 2021/22
Lösungsblatt 2
(28.11.2021)

Zentralübung

Z2.1. Transformationssatz

Wenden Sie jeweils den Transformationssatz aus der Vorlesung an, um die folgenden Integrale zu berechnen. Man wähle geeignete ausschöpfende Folgen.

(a) $\int_{[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, Transformation $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1,1)$, $g(u) = \sin u$.

(b) $\mathrm{vol}(B)$ mit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \le 1 - \frac{y^2}{4}\}$ direkt und mit der Transformation

$$g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad g(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv).$$

Bemerkung: g entspricht der komplexen Quadratfunktion $z \mapsto z^2$.

Lösung:

(a) g ist ein Diffeomorphismus, $|\det J_g(u)| = g'(u) = \cos u > 0$ für $u \in U := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ offen. Die $A_k = [-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{k}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}] \subseteq U$ sind beschränkt mit Nullrand und bilden eine ausschöpfende Folge von $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $g(A_n)$ ist auch ausschöpfende Folge von $[-1,1]$. Somit gilt

$$\int_{[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{g(A_k)} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Transf.}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} \sqrt{1-g(u)^2} |\det J_g(u)| \mathrm{d}u$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{k}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{k}} \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,\mathrm{d}u = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

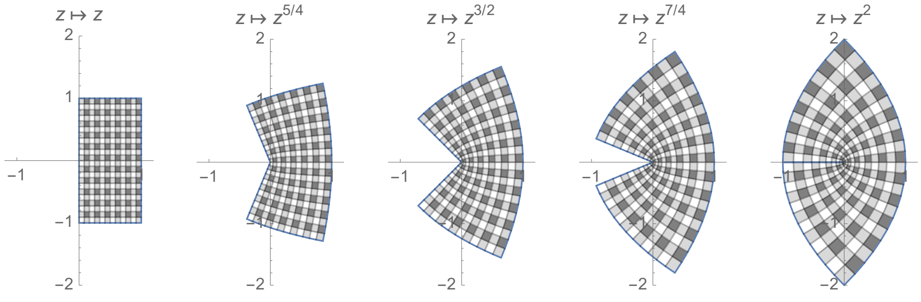
Die Substitutionsregel aus dem ersten Semester

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(g(u))g'(u)\mathrm{d}u$$

ist also im Wesentlichen die eindimensionale Version der Transformationsformel.

(b) Optional: Man kann die Fläche des Normalbereichs direkt ausrechnen

$$\mathrm{vol}(B) = \int_B \mathrm{d}^2x = \int_{-2}^{2} \mathrm{d}y \int_{-1+\frac{y^2}{4}}^{1-\frac{y^2}{4}} \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (2 - \tfrac{y^2}{2})\mathrm{d}y = 8 - 2\tfrac{2^3}{6} = \frac{16}{3}.$$



Die angegebenen Transformation ist ein Diffeomorphismus $g : U \to g(U)$ mit $U = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Anschaulich ist das klar, da die Quadratfunktion die komplexe Halbebene mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ bijektiv auf die geschlitzte komplexe Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ abbildet. Beweis durch Angabe der Umkehrfunktion (ohne Herleitung):

$$g^{-1}(x,y) = (\mathrm{Re}(\sqrt{x+\mathrm{i}y}), \mathrm{Im}(\sqrt{x+\mathrm{i}y}) = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}, \mathrm{sgn}(y)\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\right).$$

Die Jacobi-Determinante ist

$$|\det J_g(u,v)| = \left|\det\begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}\right| = 4(u^2+v^2).$$

Außerdem ist $B = \overline{g(A)}$ mit $A = (0,1] \times [-1,1]$. Für die Ränder gilt z.B.

$$\begin{aligned} \{g(1,s)\,|\,s \in [-1,1]\} &= \{(1-s^2, 2s)\,|\,s \in [-1,1]\} = \{(1-\tfrac{y^2}{4}, y)\,|\,y \in [-2,2]\} \\ \{g(s,1)\,|\,s \in [0,1]\} &= \{(s^2-1, 2s)\,|\,s \in [0,1]\} = \{(\tfrac{y^2}{4}-1, y)\,|\,y \in [0,2]\} \\ \{g(s,-1)\,|\,s \in [0,1]\} &= \{(s^2-1, -2s)\,|\,s \in [0,1]\} = \{(\tfrac{y^2}{4}-1, y)\,|\,y \in [-2,0]\} \end{aligned}$$

Da der Rand von A und $g(A)$ jeweils eine Nullmenge ist, gilt

$$\int_B \mathrm{d}^2x = \int_{g(A)} \mathrm{d}^2x \overset{(*)}{=} \int_A |\det J_g(u,v)| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = 4\int_0^1 \mathrm{d}u \int_{-1}^1 \mathrm{d}v(u^2+v^2) = 4(\tfrac{1}{3}\cdot 2 + 1 \cdot \tfrac{2}{3}) = \frac{16}{3}.$$

Der Zwischenschritt über die ausschöpfende Folge $A_k = [\frac{1}{k}, 1] \times [-1,1]$, für die auch $g(A_k)$ eine ausschöpfende Folge von B ist, um den Transformationssatz aus der Vorlesung anzuwenden, wurde bei $(*)$ weggelassen.

Z2.2. Transformationssatz für Zylinder- und Kugelkoordinaten

Zeigen Sie für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar:

- (Zylinderkoordinaten)

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}^3x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r\cos\phi, r\sin\phi, z)\ r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z,$$

  wenn die Integrale auf der linken Seite existieren.

- (Kugelkoordinaten)

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}^3x = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\ r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r,$$

  wenn die Integrale auf der linken Seite existieren.

LÖSUNG:

ANMERKUNGEN: Bestimmte Transformationen, wie zum Beispiel auf Polar-, Zylinder- oder Kugelkoordinaten werden sehr oft verwendet. Wegen Überschneidungen in den Winkelkoordinaten ist der Transformationssatz aus der vorherigen Aufgabe nicht unmittelbar anwendbar. Einmal etabliert können diese Transformationen jedoch unter den obengenannten leicht zu überprüfenden Voraussetzungen angewendet werden. ZUR ERINNERUNG: f uneigentlich Riemann-integrierbar auf einer (möglicherweise unbeschränkten) Menge bedeutet: Negativteil $f_- = \max\{-f, 0\}$ und Positivteil $f_+ = \max\{f, 0\}$ der Funktion f sind uneigentlich Riemann-integrierbar (Riemann-integrierbar entlang einer ausschöpfenden Folge) aber der Wert des uneigentlichen Integrals ist wenigstens für f_- oder für f_+ endlich.

- Zylinderkoordinaten entsprechen der Abbildung

$$g(r,\phi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det J_g(r,\phi,z) = \det \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$.

$g : \underbrace{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}}_{=:U} \to \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x\neq 0 \vee y<0\}$ ist ein Diffeomorphismus.

Ausschöpfende Folge ist $A_k = [\frac{1}{k},k]\times[\frac{1}{k},2\pi-\frac{1}{k}]\times[-k,k]$. Da $\mathbb{R}^3\backslash g(U) = \{(x,y,z)|x = 0\wedge y\geq 0\}$ eine Nullmenge ist gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}^3x = \int\limits_{g(U)} f(x)\mathrm{d}^3x = \int\limits_{U} f(g(r,\phi,z))r\mathrm{d}(r,\phi,z)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(r\cos\phi, r\sin\phi, z)\ r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r.$$

- Kugelkoordinaten entsprechen der Abbildung

$$g(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det J_g(r,\theta,\phi) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}} \overset{(*)}{=} r^2\sin\theta$.

$(*)$ Da die Vektoren b_1, b_2, b_3 paarweise senkrecht aufeinander stehen, gilt

$$\det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \|b_1\|\,\|b_2\|\,\|b_3\| = 1\cdot r\cdot r\sin\theta.$$

$g : \underbrace{(0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)}_{=:U} \to \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x\neq 0 \vee y<0\}$ ist ein Diffeomorphismus. Ausschöpfende Folge ist $A_k = [\frac{1}{k},k]\times[\frac{1}{k},\pi-\frac{1}{k}]\times[\frac{1}{k},2\pi-\frac{1}{k}]$.
Da $\mathbb{R}^3\setminus g(U) = \{(x,y,z)|x=0\wedge y\geq 0\}$ wieder eine Nullmenge ist gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}^3x = \int\limits_{g(U)} f(x)\mathrm{d}^3x = \int\limits_{U} f(g(r,\theta,\phi))r^2\sin\theta\mathrm{d}(r,\theta,\phi)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\ r^2\sin\theta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r.$$

Präsenzaufgaben

P2.1. Gegenbeispiel zu Fubini

Sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } 0 < y < x, \\ -\frac{1}{y^2} & \text{für } 0 < x < y, \\ 0 & \text{für } x = y,\ xy = 0. \end{cases}$

(a) Berechnen Sie das Doppelintegral von f auf $[0,1]^2$ für beide Integrationsreihenfolgen.

(b) Was bedeutet dies für das uneigentliche Riemann-Integral von f auf $[0,1]^2$.

(c) Sei $f_\pm \geq 0$ mit $f = f_+ - f_-$. Berechnen Sie das Integral von $f_\pm$ auf $[0,1]^2$ und diskutieren Sie die Begriffe "uneigentliches Riemann-Integral", und "absolute Riemann-Integrierbarkeit".

LÖSUNG:

(a) Man erhält

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y\, f(x,y) = \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\int_0^x \mathrm{d}y \tfrac{1}{x^2} - \int_x^1 \mathrm{d}y \tfrac{1}{y^2} \right) = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{x} + \left[\tfrac{1}{y} \right]_x^1 \right) \mathrm{d}x = 1$$

und

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x\, f(x,y) = \int_0^1 \mathrm{d}y \left(\int_0^y \mathrm{d}x (-\tfrac{1}{y^2}) + \int_y^1 \mathrm{d}x \tfrac{1}{x^2} \right) = \int_0^1 \left(-\tfrac{1}{x} - \left[\tfrac{1}{y} \right]_x^1 \right) \mathrm{d}x = -1.$$

Die beiden Ergebnisse sind nicht gleich. f kann also nicht (absolut) integrierbar sein auf $[0,1]^2$.

(b) Da f unbeschränkt ist braucht man ausschöpfende Folgen. Das erste Doppelintegral ist der Grenzwert der Integrale auf der ausschöpfenden Folge $[\frac{1}{k}, 1] \times [0,1]$, dass zweite Integral ergibt sich als Limes der Integrale auf der ausschöpfenden Folge $[0,1] \times [\frac{1}{k}, 1]$. Auf jeder dieser Mengen ist f eigentlich Riemann-integrierbar. Es kann nur daran liegen, dass f nicht positiv ist.

(c) Es gilt

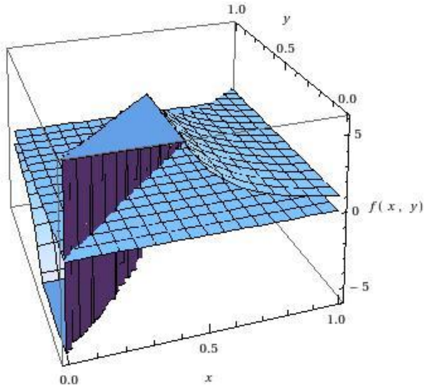
$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y\, f_+(x,y) = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \tfrac{1}{x^2} = \int_0^1 \tfrac{1}{x} \mathrm{d}x = \infty.$$

Das gleiche Ergebnis erhält man für f_-. Das Volumen unter dem positiven Teil von f ist also unendlich groß, genau wie das Volumen über dem negativen Teil. Für f_+ und f_- existiert also jeweils das uneigentliche Riemann-Integral über $[0,1]^2$, für $f = f_+ - f_-$ dagegen nicht. Absolut integrierbar sind alle drei Funktionen nicht. Dazu müssen **beide** Integrale, über f_+ und f_- enndliche Werte liefern.

Bemerkung:

Beim Versuch "$\infty - \infty$" zu berechnen hängt das Ergebnis davon ab in welcher Reihenfolge man aufsummiert.

Aus Symmetriegründen (f ist antisymmetrisch bezüglich der Diagonalen, $f(x,y) = -f(y,x)$) würde man erwarten, dass das Integral Null ergeben sollte, aber das ist ungefähr so gut begründet wie die Behauptung das der Grenzwert der Folge $(-1)^k$ aus Symmetriegründen Null ist.



P2.2. Leibnizsche Sektorenformel in Polarkoordinaten I

Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine in Polarkoordinaten gegebene geschlossene Kurve um den Ursprung, d.h., $\binom{\gamma_1}{\gamma_2}(\phi) = \binom{r(\phi)\cos\phi}{r(\phi)\sin\phi}$, mit $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ stetig differenzierbar und $r(0) = r(2\pi)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von γ eingeschlossenen Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Hilfe der Transformation $g(\rho, \phi) = \binom{\rho\cos\phi}{\rho\sin\phi}$ für (ρ, ϕ).

LÖSUNG:

g ist die Parametrisierung durch Polarkoordinaten und $\det J_g(\rho, \phi) = \rho$. Wir schränken g auf den Normalbereich $A = \{(\rho, \phi) | 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq r(\phi)\}$ ein. Somit ist $g(A) = B$. g ist injektiv auf $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) \cap A$, denn zu jedem Punkt $(x, y) \neq 0$ der innerhalb der Kurve γ liegt, gibt es genau ein $\phi \in [0, 2\pi)$ und ein $\rho > 0$, so dass $x + iy = \rho e^{i\phi}$. Die Punkte in denen g nicht injektiv ist bilden also eine Nullmenge und wir können den Transformationssatz anwenden

$$\int_B \mathrm{d}^2x = \int_{g(A)} \mathrm{d}^2x = \int_A |\det J_g(\rho, \phi)| \mathrm{d}(\rho, \phi) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{r(\phi)} \mathrm{d}\rho\, \rho = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(\phi)^2 \mathrm{d}\phi.$$

P2.3. Das Volumen der vierdimensionalen Kugel

Berechnen Sie das Volumen der vierdimensionalen Einheitskugel.
HINWEIS: Man fasse jeweils zwei Koordinaten zusammen.

LÖSUNG:

Die Kugel $B = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, \|x\| \leq 1\}$ ist ein Normalbereich. Im zweiten Schritt fassen wir die ersten und die letzten beiden Variablen wieder jeweils zu einem Flächenintegral zusammen.

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(B) &= \int_B \mathrm{d}^4x = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x_1 \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \mathrm{d}x_2 \int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \mathrm{d}x_3 \int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}} \mathrm{d}x_4 \\
&\overset{(*)}{=} \int_{x_1^2+x_2^2 \leq 1} \mathrm{d}(x_1, x_2) \int_{x_3^2+x_4^2 \leq 1-x_1^2-x_2^2} \mathrm{d}(x_3, x_4) \overset{(**)}{=} \int_{x_1^2+x_2^2 \leq 1} \mathrm{d}(x_1, x_2) \pi(1 - x_1^2 - x_2^2) \\
&\overset{(***)}{=} \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, r\pi(1 - r^2) = 2\pi^2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}) = \frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

$(*)$ Die Variablen x_1, x_2 werden offenbar über die Einheitskreisscheibe integriert. Setzt man $R = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$, so erkennt man das die Variablen x_3, x_4 über den Bereich $\{(x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -R \leq x_3 \leq R \wedge |x_4| \leq \sqrt{R^2 - x_3^2}\}$ laufen, also einer Kreisscheibe mit Radius R.

(**) Auch ohne explizite Verwendung der Transformationsformel setzen wir die bekannte Fläche einer Kreisscheibe ein.
(* * *) Hierbei wurde die Transformationsformel für Polarkoordinaten benutzt:
Für $g(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$, mit $\det J_g(r,\phi) = r$ und stetigem f gilt:

$$\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le R} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) \quad = \int\limits_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\phi, r\sin\phi) r\mathrm{d}(r,\phi) = \int_0^R\int_0^{2\pi} f(r\cos\phi, r\sin\phi) r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r.$$

Hausaufgaben

H2.1. Uneigentliche Integrale

Für welche Werte von $\alpha > 0$ existiert für $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$, das Integral über die Einheitskugel, $\int\limits_{\|x\|\le 1} f(x)\mathrm{d}^d x$, $d = 1,2,3$?

LÖSUNG:

$d = 1$: Für nichtnegative Funktionen auf $\mathbb{R}$ ist absolut Riemann-integrierbar dasselbe wie uneigentlich Riemann-integrierbar (Analysis 1). Somit ist

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{2}{1-\alpha} < \infty & \text{für } \alpha < 1, \\ \infty & \text{für } \alpha \ge 1. \end{cases}$$

$d = 2$:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\|x\|\le 1} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\mathrm{d}^2 x &\overset{\text{auschöpf.}}{=} \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{k}\le\|x\|\le 1} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\mathrm{d}^2 x \overset{\text{Transf.}}{=} \lim_{k\to\infty} \int\limits_{[\frac{1}{k}]\times[0,2\pi]} \frac{1}{r^\alpha} r\mathrm{d}(r,\phi) \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\frac{1}{k}}^{1} 2\pi \frac{1}{r^{\alpha-1}}\mathrm{d}r = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} & \text{für } \alpha < 2, \\ \infty & \text{für } \alpha \ge 2. \end{cases} \end{aligned}$$

$d = 3$:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\|x\|\le 1} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\mathrm{d}^3 x &\overset{\text{auschöpf.}}{=} \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{k}\le\|x\|\le 1} \frac{1}{\|x\|^\alpha}\mathrm{d}^3 x \overset{\text{Transf.}}{=} \lim_{k\to\infty} \int\limits_{[\frac{1}{k},1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \frac{1}{r^\alpha} r^2 \sin\theta\mathrm{d}(r,\theta,\phi) \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\frac{1}{k}}^{1} \frac{1}{r^{\alpha-2}}\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = \begin{cases} \frac{4\pi}{3-\alpha} & \text{für } \alpha < 3, \\ \infty & \text{für } \alpha \ge 3. \end{cases} \end{aligned}$$

H2.2. Leibnizsche Sektorenformel in Polarkoordinaten II

Wie in P2.2 sei $\gamma(\phi) = \binom{r(\phi)\cos\phi}{r(\phi)\sin\phi}$, $\phi \in [0,2\pi]$, mit $r : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^+$ stetig differenzierbar und $r(0) = r(2\pi)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von γ eingeschlossenen Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$, hier mit Hilfe der Transformation $g(\rho,\phi) = \rho\gamma(\phi)$ für $(\rho,\phi) \in A := [0,1]\times[0,2\pi]$.

LÖSUNG:

Es gilt $\gamma'(\phi) = \binom{r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\sin\phi}{r'(\phi)\sin\phi + r(\phi)\cos\phi}$.
g ist stetig differenzierbar mit

$$\det J_g(\rho,\phi) = \det\begin{pmatrix}\gamma(\phi) & \rho\gamma'(\phi)\end{pmatrix} = \rho(\gamma_1(\phi)\gamma_2'(\phi) - \gamma_2(\phi)\gamma_1'(\phi)) = \rho\, r(\phi)^2,$$

also ein lokaler Diffeomorphismus für $\rho > 0$. g ist injektiv auf $(0,1]\times[0,2\pi)$, denn zu jedem Punkt $(x,y) \ne 0$ der innerhalb der Kurve γ liegt, gibt es genau ein $\phi \in [0,2\pi)$

und ein $s > 0$, so dass $x + \mathrm{i}y = se^{\mathrm{i}\phi}$, wodurch auch $\rho = \frac{s}{r(\phi)} \leq 1$ eindeutig bestimmt ist. Die Punkte, in denen g nicht injektiv ist, bilden also eine Nullmenge und wir können den Transformationssatz anwenden

$$\int_B \mathrm{d}^2x = \int_{g(A)} \mathrm{d}^2x = \int_A |\det J_g(\rho,\phi)|\mathrm{d}(\rho,\phi) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^1 \mathrm{d}\rho\, \rho\, r(\phi)^2 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\phi)^2 \mathrm{d}\phi.$$

H2.3. Das Volumen der d-dimensionalen Kugel

Sei $V_d := \mathrm{vol}(\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq 1\})$ das Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel.

(a) Berechnen Sie V_d für $d > 2$ durch Rückführung auf V_{d-2} und Polarkoordinaten. (Ergebnis: $V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}$, $V_{2k+1} = \frac{2(2\pi)^k}{(2k+1)!!}$ für $k \in \mathbb{N}_0$, wobei

$$(2k+1)!! := 1 \cdot 3 \cdots (2k+1) = \tfrac{(2k+1)!}{2^k k!}.)$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Gammafunktion und vollständiger Induktion für $d \in \mathbb{N}_0$ die Gültigkeit der Formel

$$V_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$$

(siehe Analysis 1; wir brauchen: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$).

LÖSUNG:

(a)

$$V_d = \int_{x_1^2+\cdots+x_d^2 \leq 1} \mathrm{d}^d x \overset{\text{Fub}}{=} \int_{x_1^2+x_2^2\leq 1} \mathrm{d}(x_1,x_2) \underbrace{\int_{x_3^2+\cdots+x_d^2 \leq 1-x_1^2-x_2^2} \mathrm{d}(x_3,\ldots,x_d)}_{\text{Kugel mit Radius } \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}$$

$$\overset{(*)}{=} \int_{x_1^2+x_2^2\leq 1} \left(\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\right)^{d-2} V_{d-2} \mathrm{d}(x_1,x_2) \overset{\text{Polarkoord.}}{=} 2\pi \int_0^1 r(1-r^2)^{\frac{d-2}{2}} \mathrm{d}r V_{d-2}$$

$$= 2\pi\Big[-\frac{(1-r^2)^{\frac{d}{2}}}{d}\Big]_0^1 V_{d-2} = \frac{2\pi}{d} V_{d-2}.$$

$(*)$ Wegen der Skalierungseigenschaft des Volumens gilt

$$\mathrm{vol}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}) = R^n \mathrm{vol}(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\})$$

Wegen $V_1 = 2$ und $V_2 = \pi$ gilt also für alle $k \in \mathbb{N}$

$$V_{2k} = \frac{\pi}{k} V_{2(k-1)} \overset{\text{Induktion}}{=} \frac{\pi^k}{k!},$$

$$V_{2k+1} = \frac{2\pi}{2k+1} V_{2(k-1)} \overset{\text{Induktion}}{=} 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2\pi}{5} \cdots \frac{2\pi}{2k+1} = \frac{2(2\pi)^k}{(2k+1)!!}.$$

(b) Wir setzen $W_d := \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$. Dann ist $W_0 = 1 = V_0$ und $W_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = 2 = V_1$ und für $k > 1$ gilt

$$\frac{W_{2k}}{W_{2k-2}} = \frac{\frac{\pi^k}{\Gamma(k+1)}}{\frac{\pi^{k-1}}{\Gamma(k)}} = \frac{\pi}{k} = \frac{2\pi}{2k},$$

$$\frac{W_{2k+1}}{W_{2k-1}} = \frac{\frac{\pi^k\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+1\frac{3}{2})}}{\frac{\pi^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+\frac{1}{2})}} = \frac{\pi}{k+\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{2k+1}.$$

Somit gilt für alle $d \geq 2$, dass $W_d = \frac{2\pi}{d} W_{d-2}$ ist. Da für W_d und V_d die gleiche Rekursionsformel gilt, mit gleichen Anfangswerten, gilt $V_d = W_d$ für alle $d \in \mathbb{N}_0$.