Z2.1. Transformationssatz

Wenden Sie jeweils den Transformationssatz aus der Vorlesung an, um die folgenden Integrale zu berechnen. Man wähle geeignete ausschöpfende Folgen.

(a) $\int_{[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, Transformation $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1, 1)$, $g(u) = \sin u$.

(b) $\mathrm{vol}(B)$ mit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 - \frac{y^2}{4}\}$ direkt und mit der Transformation

$$g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad g(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv).$$

BEMERKUNG: g entspricht der komplexen Quadratfunktion $z \mapsto z^2$.

Transformationssatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g : U \to g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus und $A \subseteq U$ beschränkt mit ∂A vom Lebesgue-Maß Null in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jede Riemann-int. Fkt. $f : g(A) \to \mathbb{R}$

$$\int_{g(A)} f(y)\,dy = \int_A f(g(x))\,|\det J_g(x)|\,dx$$

wobei $(J_g(x))_{k\ell} = \partial_\ell g_k(x)$

Charakterisierung von C^1-Diffeomorphismen

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ injektiv. Dann ist $g : U \to g(U)$ genau dann ein C^1-Diffeomorphismus, wenn $\det(J_g(x)) \neq 0$ $\forall x \in U$.

Z2.3. Transformationssatz für Zylinder- und Kugelkoordinaten

Zeigen Sie für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar:

- (Zylinderkoordinaten)

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}^3x = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(r\cos\phi, r\sin\phi, z)\; r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z,$$

wenn die Integrale auf der linken Seite existieren.

- (Kugelkoordinaten)

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}^3x = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\; r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r,$$

wenn die Integrale auf der linken Seite existieren.

Uneigentliches Riemann - Integral

Sei $f: A \to \mathbb{R}$ mit $A \subset \mathbb{R}^n$.

Wenn $f \geq 0$ ist und eine ausschöpfende Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ für A existiert, so dass $\forall k$ $f|_{A_k}$ beschränkt und R.- integrierbar ist, dann heißt

$$\lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f(x)\,dx =: \int_A f(x)\,dx \qquad \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

das uneigentliche Riemann - Integral von f auf A

Transformationssatz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g: U \to g(U) \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1 - Diffeomorphismus und $A \subset U$ beschränkt mit ∂A vom Lebesgue-Maß Null in $\mathbb{R}^n$.

Dann gilt für jede Riemann- integrierbare Funktion $f: g(A) \to \mathbb{R}$:

$$\int_{g(A)} f(y)\,dy = \int_A f(g(x))\,|\det J_g(x)|\,dx.$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g: U \to g(U) \subset \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei (A_k) eine ausschöpfende Folge kompakter Mengen von U, so dass $(g(A_k))$ eine ausschöpfende Folge von $g(U)$ ist.

Dann gilt:

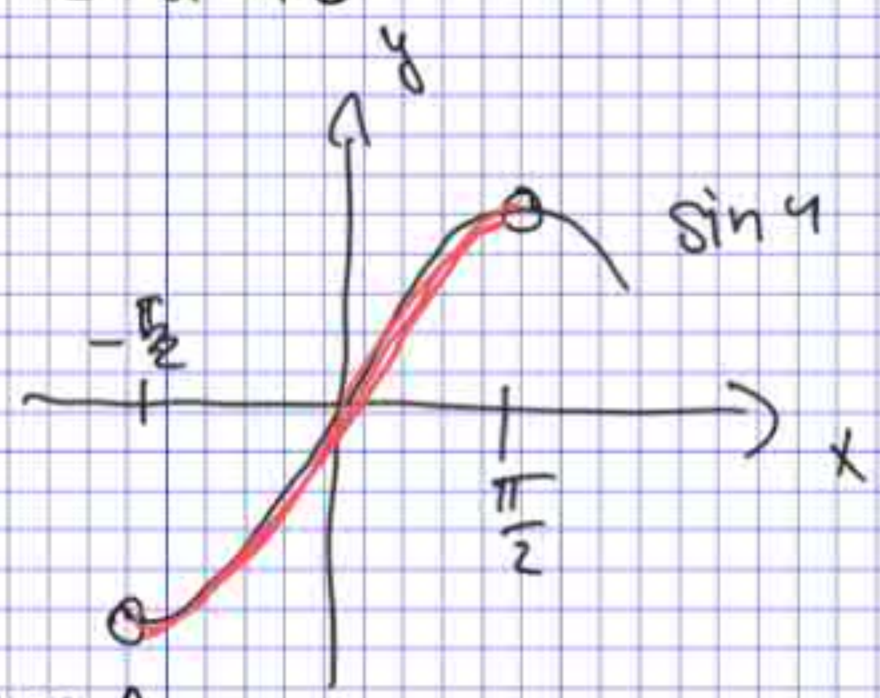
$$\int_{g(U)} f(x)\,d^n x = \int_U f(g(u))\,|\det J_g(u)|\,d^n u$$

falls auf einer Seite das Integral im uneigentlichen Sinne existiert.

ZÜ 2

Z 2.1

$\left|\det D_g(u)\right| = \left|g'(u)\right| = \cos u \neq 0$



$g(u) = \sin u$

für $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

ist $\sin u$ injektiv

$\Rightarrow$ C^1-Diffeomorphismus

$g(A) = [-1, 1] \nsubseteq g(U) = (-1, 1)$

$A_k \qquad A_k \subseteq U$

$A_k = \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{k}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}\right] \subseteq U$ beschränkt, mit Nullrand

und ist ausschöpfende Folge von $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$g(A_k)$ ist ausschöpfende Folge von $[-1, 1]$

$g(A_k) \subseteq g(u)$

$$\int_{[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{g(A_k)} \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{\text{Trasf.}}{=}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} \sqrt{1-g(u)^2}\;|\det J_g(u)|\,du =$$

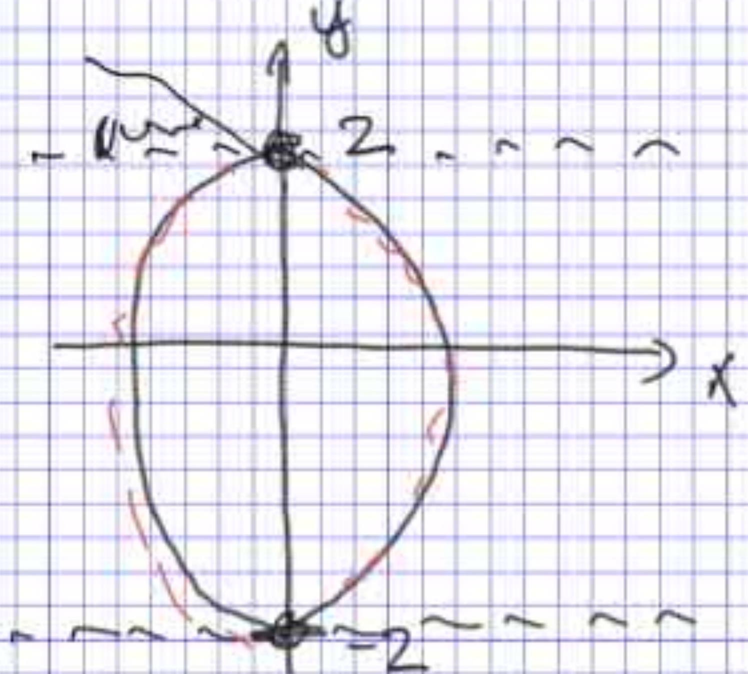
$$= \lim_{k\to\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{k}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{k}} \sqrt{\underbrace{1-\sin^2 u}_{\cos^2 u}}\;\cos u\,du =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = \frac{\pi}{2}$$

Substitutionsregel:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(u))\,g'(u)\,du$$

B)



Normalbereich

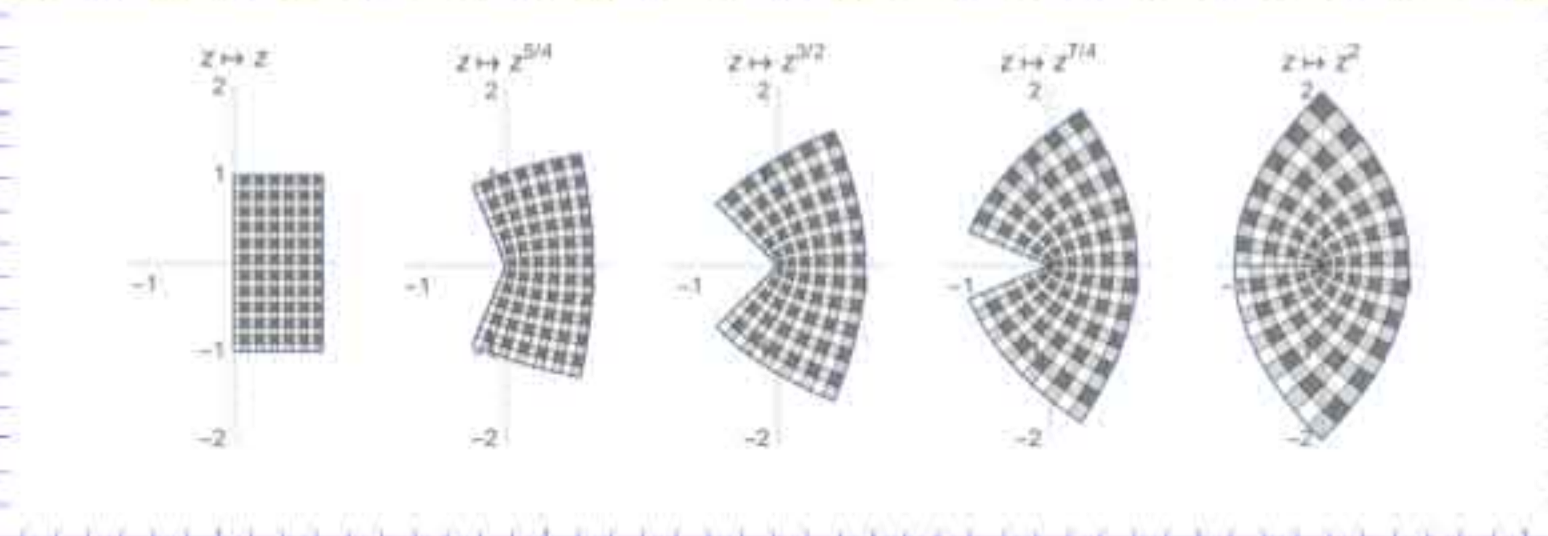
$1-\frac{y^2}{4} = -1+\frac{y^2}{4}$

$2 = \frac{2y^2}{4}$ $\quad y^2=4$

$y = \pm 2$

$$\mathrm{vol}(B) = \int_B d^2x = \int_{-2}^{2} dy \int_{-1+\frac{y^2}{4}}^{1-\frac{y^2}{4}} dx = \int_{-2}^{2}\left(2-\frac{y^2}{2}\right) dy =$$

$= \frac{16}{3}$



Umkehrfkt. $\Rightarrow$ C^1-Diffeomorphismus vgl. MuLö

$$|\det J_g(u,v)| = \left|\det \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}\right| = 4u^2 + 4v^2$$

$$A = (0,1] \times [-1,1] \qquad B = \overline{g(A)}$$

vgl. MuLö

$$\int_B d^3x = \int_{g(A)} d^3x = \int_A |\det J_g| \, du \, dv =$$

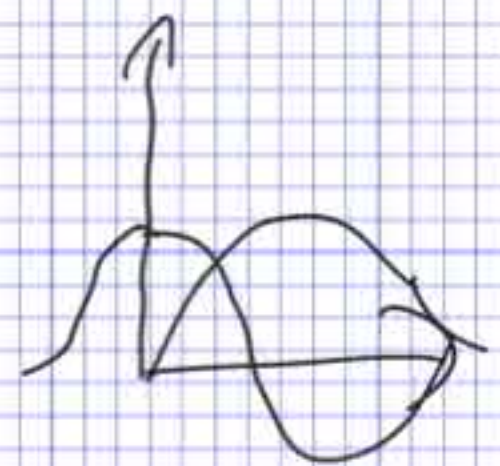
$$= 4 \int_0^1 du \int_{-1}^1 (u^2 + v^2) dv = \frac{16}{3}$$

$A_n = [\frac{1}{n}, 1] \times [-1,1]$ ausschöpfende Folge

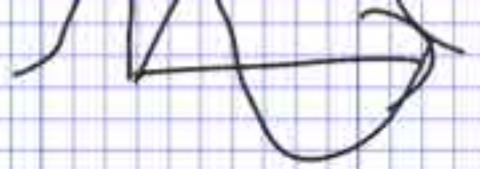
Z 2.2

- Zylinderkoordinaten

$$g(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos\varphi \\ r \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$



$$\det Dg = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

$$g : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0 \vee y < 0\}$$

$\Rightarrow$ Diffeomorphismus

$$A_k = \left[\tfrac{1}{k}, k\right] \times \left[\tfrac{1}{k}, 2\pi - \tfrac{1}{k}\right] \times [-k, k]$$ ausschöpfende Folge

$\mathbb{R}^3 \setminus g(U) = \{(x, y, z) \mid x = 0 \wedge y \geq 0\}$ ist Nullmenge

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\, d^3x = \int_{g(U)} f(x)\, d^3x \underset{\text{Transf. f. uneig. Int.}}{=} \int_U f(g(r, \varphi, z))\, r\, d(r, \varphi, z) =$$

$$\overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\, dz\, d\varphi\, dr$$

$$\int_{g(U)} f(x)\, d^n x = \lim_{k\to\infty} \int_{g(A_k)} f(x)\, d^n x \overset{\text{Transf.}}{=}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f(g(u))\, |\det J_g(u)|\, d^n u =$$

$$= \int_U f(g(u))\, |\det J_g(u)|\, d^n u$$