Wir importieren ein nützliches Werkzeug aus der lin. Algebra:

Satz: (Singulärwertzerlegung)

> Für jede Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gibt es orthogonale Transformationen $U \in O(n)$, $V \in O(m)$ und $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\min\{n,m\}}$, so dass $M = U\Lambda V$ wobei $\Lambda_{kl} := \delta_{kl}\, s_k$.

Bem.:
- Für positiv semi-definites M ist dies die Eigenwertzerlegung (wobei $U = V^T$).
- Die Menge der „Singulärwerte" $\{s_k\}$ ist eindeutig für jedes M. $\{s_k^2\}$ sind Eigenwerte von $M^T M$.

Korollar: Sei $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt mit ∂A vom Lebesgue-Maß Null. Dann gilt:

$$\boxed{\mathrm{vol}(MA) = |\det(M)|\, \mathrm{vol}(A)}$$

Beweis: Sei $M = U\Lambda V$ Singulärwertzerlegung mit $\Lambda_{kl} = \delta_{kl}\, s_k$.

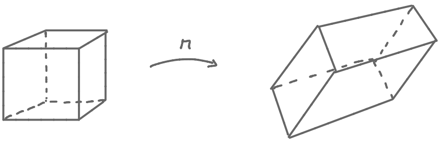
$$\mathrm{vol}(MA) = \mathrm{vol}(U\Lambda V A) \underset{(vi)}{=} \mathrm{vol}(\Lambda V A) \underset{(vii)}{=} \mathrm{vol}(VA) \prod_{k=1}^{n} s_k \underset{(vi)}{=} \mathrm{vol}(A) \prod_{k=1}^{n} s_k .$$

Zudem gilt $|\det(M)| = |\det(U)\det(\Lambda)\det(V)| = |\det(\Lambda)| = \prod_{k=1}^{n} s_k$

$U \in O(n) \Rightarrow \det(U) \in \{\pm 1\}$, da $1 = \det(U^T U) = \det(U)^2$.

$\square$

Bem.: Der Einheitsquader $Q = [0,1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ wird von M auf ein „Parallelotop" mit Volumen $\mathrm{vol}(MQ) = |\det M|$ abgebildet.



<u>Erinnerung:</u> • Sind $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann heißt $g \in C^1(U,V)$ C^1-Diffeomorphismus wenn g bijektiv und $g^{-1}: V \to U$ diff.bar ist. In dem Fall gilt automatisch $g^{-1} \in C^1(V,U)$.

<u>Lemma:</u> (Charakterisierung von C^1-Diffeomorphismen)
Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ injektiv. Dann ist $g: U \to g(U)$ genau dann ein C^1-Diffeomorphismus, wenn $\det\big(\underbrace{J_g(x)}_{\text{Jacobi-Matrix von } g \text{ bei } x.}\big) \neq 0 \quad \forall x \in U$.

<u>Beweis:</u> Folgt unmittelbar aus dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit (Analysis 2). □

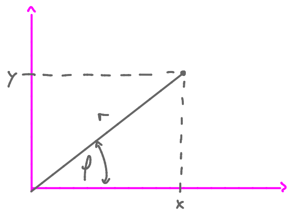
<u>Bsp.:</u> (Polarkoordinaten)

$$U := \{ (r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0,\ \varphi \in (0, 2\pi) \}$$

$$g(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$J_g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det\big(J_g(r,\varphi)\big) = r\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$$



$g: U \to g(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,y) \mid x \geq 0,\ y = 0 \}$ ist bijektiv und dem Lemma nach ein C^1-Diffeomorphismus.

Satz: (Transformationssatz)

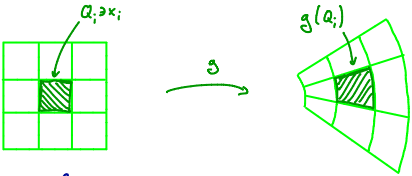
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g: U \to g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus und $A \subseteq U$ beschränkt mit ∂A vom Lebesgue-Maß Null in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jede Riemann-int. Fkt. $f: g(A) \to \mathbb{R}$:

$$\boxed{\int_{g(A)} f(y)\,dy = \int_A f(g(x))\,|\det \mathcal{J}_g(x)|\,dx},$$

wobei $(\mathcal{J}_g(x))_{kl} := \partial_l g_k(x)$.

Bem.:
- $g(A)$ ist wieder beschränkt und $\partial g(A) = g(\partial A)$ vom Lebesgue-Maß Null.
- Es genügt, wenn $g \in C^1$ fast überall Diffeomorphismus ist.
- $\det \mathcal{J}_g(x)$ nennt man „Funktionaldeterminante".

Beweisidee: Angenommen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Quader mit Zerlegung $A = \bigcup_{i=1}^m Q_i$, $Q_i = Q_0 + x_i$, $x_i \in Q_i$



Für immer feiner werdende Zerlegungen gilt wegen R-integrierbarkeit von f:

$$\left| \int_{g(A)} f(y)\,dy - \sum_{i=1}^m f(g(x_i))\,\mathrm{vol}(g(Q_i)) \right| \to 0 .$$

Wegen Diff.barkeit von g gilt zudem:

$$g(Q_i) = g(x_i + Q_0) \approx g(x_i) + Dg(x_i)\,Q_0$$

$$\mathrm{vol}(g(Q_i)) \approx \mathrm{vol}(g(x_i) + Dg(x_i)\,Q_0) = \mathrm{vol}(Dg(x_i)\,Q_0)$$

Transl. invarianz

$$= |\det \mathcal{J}_g(x_i)|\,\mathrm{vol}(Q_i)$$

Volumen eines Parallelotops

Also: $$\int_{g(A)} f(y)\,dy \approx \sum_{i=1}^m f(g(x_i))\,|\det \mathcal{J}_g(x_i)|\,\mathrm{vol}(Q_i) \approx \int_A f(g(x))\,|\det \mathcal{J}_g(x)|\,dx.$$

$\square$