## Zentralübung

### Z12.1. Fréchet-Riesz-Darstellungssatz

Bestimmen Sie für die gegebenen Hilberträume $\mathcal{H}$ und linearen Funktionale $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ jeweils einen Vektor $\psi \in \mathcal{H}$, so dass $f(\phi) = \langle \psi, \phi \rangle$ für alle $\phi \in \mathcal{H}$ gilt.

(a) $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$, $f(\phi) = 2\phi_1 - \mathrm{i}\phi_3$.

(b) $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit dem Skalarprodukt $\langle A, B\rangle = \overline{A_{11}}B_{11} + \overline{A_{12}}B_{12} + \overline{A_{21}}B_{21} + \overline{A_{22}}B_{22}$ und $f(B) = \mathrm{i}(B_{12} - B_{21})$.

(c) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, $f(\phi) = (1 + \mathrm{i}) \int\limits_{-1}^{1} \phi(x)\mathrm{d}x$.

(d) $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, $f(\phi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n}{n}$.

Warum sind die linearen Funktionale stetig?

Lösung:

(a) Für $\psi = (2, 0, \mathrm{i})$ ist $\langle \psi, \phi\rangle = \sum\limits_{i=1}^{3} \overline{\psi_i}\phi_i = 2\phi_1 - \mathrm{i}\phi_3 = f(\phi)$.

(b) Für $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und beliebige $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ gilt

$$\langle A, B\rangle = \overline{-\mathrm{i}}B_{12} + \bar{\mathrm{i}}B_{21} = \mathrm{i}(B_{12} - B_{21}) = f(B)$$

(c) Für die Funktion $\psi(x) = (1 - \mathrm{i})\chi_{[-1,1]}(x)$, gilt $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ und für jedes $\phi \in L^2(\mathbb{R})$

$$\langle \psi, \phi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{(1 - \mathrm{i})\chi_{[-1,1]}(x)}\phi(x)\mathrm{d}x = (1 + \mathrm{i}) \int\limits_{-1}^{1} \phi(x)\mathrm{d}x = f(\phi).$$

(d) Wir setzen $\psi_n = \frac{1}{n}$. Dann ist für $\phi \in \ell^2(\mathbb{N})$

$$\langle \psi, \phi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\psi_n}\phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n}{n} = f(\phi).$$

Die jeweilige Darstellung ist eindeutig. Laut Vorlesung sind lineare Funktionale der Form $\phi \mapsto \langle \psi, \phi\rangle$ (sogar gleichmäßig) stetig.

### Z12.2. Konvergenz im Prähilbertraum

Sei $(x_n)$ eine orthogonale Folge in einem Prähilbertraum $\mathcal{H}$, d.h. $\langle x_n, x_m\rangle = 0$ für $n \neq m$.

(a) Zeigen Sie: Ist die Folge $(x_n)$ konvergent, so ist ihr Grenzwert 0.

(b) Zeigen Sie: Ist $(x_n)$ orthonormal, so ist $(x_n)$ nicht konvergent.

(c) Geben Sie konkret eine orthogonale Folge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to 0$ an.

LÖSUNG:

(a) Sei $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Für festes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\langle x_m, x\rangle = \langle x_m, \lim_{n\to\infty} x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_m, x_n\rangle = 0,$$

da das Skalarprodukt stetig und die Folge für $n > m$ identisch 0 ist. Somit ist

$$\langle x, x\rangle = \langle \lim_{m\to\infty} x_m, x\rangle = 0,$$

also $x = 0$.

(b) Nach Pythagoras ist für $n \neq m$

$$\|x_n - x_m\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x_m\|^2 = 2.$$

$(x_n)$ ist also keine Cauchyfolge und damit auch nicht konvergent.

(c) $e^{(k)} \in \ell^2(\mathbb{N})$ mit $e_j^{(k)} = \delta_{jk}$ ist ONB von $\ell^2$. $x_n = \frac{1}{n} e^{(n)}$ ist offenbar Nullfolge, da $\|x_n\| = \frac{1}{n} \to 0$.

**Z12.3. Vollständigkeit der Hermite-Funktionen in $L^2(\mathbb{R})$**

Die Hermite-Funktionen $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, aus Aufgabe H9.2.(e) bilden eine Familie orthnormaler Funktionen in $L^2(\mathbb{R})$. Sie sind von der Form $h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$, wobei $H_n$ jeweils ein Polynom vom Grad $n$ ist. Man zeige:

(a) Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ beliebig. Dann ist

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{e}^{zx} \mathrm{d}x$$

eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

(b) Für die Funktion $F$ aus (a) gilt $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \frac{x^n}{n!} \mathrm{d}x$.

(c) Es gelte für $f \in L^2(\mathbb{R})$, dass $\langle h_n, f\rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $f = 0$. Dies bedeutet, dass die Hermite-Funktionen eine Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{R})$ bilden.

LÖSUNG:

(a) Ähnlich wie in Z8.2.(a) zeigt man zunächst, dass $F$ stetig ist. Gelte $\mathbb{C} \ni z_n \to z \in \mathbb{C}$, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} F(z_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{e}^{z_n x} \mathrm{d}x \overset{\text{maj. Kgz}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{e}^{zx} \mathrm{d}x = F(z),$$

da wegen $|\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{e}^{zx}| \leq \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2} + |z||x|}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ die Funktion $g(x) = f(x) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2} + L|x|}$ mit $L := \sup\{|z_n| : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Majorante ist, die als Produkt zweier $L^2$-Funktionen selbst in $L^1$ ($\int |fg| \mathrm{d}x < \infty$ muss gelten, wenn $\langle f, g\rangle \in \mathbb{C}$ ist) also integrierbar ist.
Um nun auf die Holomorphie mit Hilfe des Satzes von Morera schließen zu können, muss das Kurvenintegral von $F$ entlang beliebiger geschlossener Kurven verschwinden: Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene Kurve. Dann ist

$$\oint_\gamma F(z) \mathrm{d}z = \oint_\gamma \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{e}^{zx} \mathrm{d}x \mathrm{d}z \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \oint_\gamma f(x) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{e}^{zx} \mathrm{d}z \mathrm{d}x = 0,$$

wobei Fubini angewendet werden kann, weil mit $L := \sup\{|\gamma(t)| : t \in [0, 1]\}$ und $M := \sup\{|\gamma'(t)| : t \in [0, 1]\}$ der Integrand auf $\mathbb{R} \times [0, 1]$ durch das wieder integrierbare $h(x) = f(x) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2} + L|x|} M$ abgeschätzt werden kann und daher selbst integrierbar ist.
Somit ist $F$ eine ganze Funktion.

(b) Es ist wieder das Vertauschen von Limes und Integral zu rechtfertigen:

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \Big( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n \Big) \mathrm{d}x \overset{\text{maj. Kgz.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\Big( \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \frac{x^n}{n!} \mathrm{d}x \Big)}_{= c_n} z^n.$$

Hier ist wegen $|\frac{x^n}{n!}| \leq \mathrm{e}^{|x|}$ die Funktion $h(x) = f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+|x|}$ eine integrierbare Majorante.

(c) Die Hermite-Funktionen sind von der Form

$$h_n(x) = (a_n^{(n)} x^n + a_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + \cdots + a_0^{(n)})\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

mit $a_n^{(n)} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Per Induktion zeigt man nun, dass für ein $f$, das senkrecht auf allen $h_n$ steht, die Koeffizienten $c_n = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \frac{x^n}{n!}\mathrm{d}x$ alle gleich Null sind.
Für $n = 0$ gilt $0 = \langle h_0, f\rangle = \int a_0^{(0)} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} f(x)\mathrm{d}x = a_0^{(0)} c_0$, also $c_0 = 0$.
Ist für $n \in \mathbb{N}$ nun schon $c_k = 0$ für $0 \leq k < n$ gezeigt, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 = \langle h_n, f\rangle &= \int \big(a_n^{(n)} x^n + a_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + \cdots \big)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} f(x)\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} \int a_n^{(n)} x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} f(x)\mathrm{d}x = n! a_n^{(n)} c_n, \end{aligned}$$

also auch $c_n = 0$. Aus (b) folgt nun, dass das in (a) definierte $F$ die Nullfunktion ist. Es gilt also insbesondere für $z = -\mathrm{i}k$, $k \in \mathbb{R}$, dass

$$0 = F(-\mathrm{i}k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x,$$

Die Fouriertransformierte der $L^1$-Funktion $x \mapsto g(x) = f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ ist also die Nullfunktion, die natürlich selbst wieder eine $L^1$-Funktion ist. Nach dem Umkehrsatz für die Fouriertransformation ist (jeder Repräsentant von) $g$ fast überall gleich der Rücktransformation von $\widehat{g} = 0$, also $g = 0 \in L^1$. Damit folgt aber auch $f = 0 \in L^2$.
Insgesamt wurde also gezeigt, dass $\operatorname{span}(\{h_n | n \in \mathbb{N}_0\})^{\perp} = \{0\}$ ist, bzw., dass

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\operatorname{span}(\{h_n | n \in \mathbb{N}_0\})}$$

ist. Da die $h_n$ eine orthonormale Familie sind, ist das gleichbedeutend damit, dass $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Orthonormalbasis des $L^2(\mathbb{R})$ bilden.

### Präsenzaufgaben

### P12.1. Orthogonalität und lineare Unabhängigkeit

Zeigen Sie: Ist $E \subseteq \mathcal{H} \setminus \{0\}$ eine Menge paarweise zueinander orthogonaler Vektoren im Prähilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, so ist $E$ eine linear unabhängige Menge von Vektoren.

Lösung:

Zu zeigen ist, dass für jede endliche Teilmenge $F$ von $E$ die 0 nur als triviale Linearkombination von Vektoren aus $F$ darstellbar ist.
Sei $F = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine endliche Teilmenge von $E$. Aus

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

folgt für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$0 = \langle v_i, 0\rangle = \langle v_i, \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n\rangle = \alpha_i \langle v_i, v_i\rangle,$$

also gilt wegen $\langle v_i, v_i\rangle \neq 0$ auch $\alpha_i = 0$.
Dies beweist also die lineare Unabhängigkeit.

**P12.2. Orthonormalbasis für symmetrische periodische Funktionen**

Auf $L^2([-\pi,\pi])$ mit dem Skalarprodukt $\langle f,g\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}g(x)\mathrm{d}x$ bilden die Funktionen $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ eine Orthonormalbasis (genauso, wie auf $L^2([0,2\pi])$). Zeigen Sie,

(a) dass der Unterraum der ungeraden Funktionen

$$U := \{f \in L^2([-\pi,\pi]) \,|\, \forall x \in [-\pi,\pi] : f(-x) = -f(x)\}$$

abgeschlossen ist,

(b) dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)$, eine Orthonormalbasis von $U$ bildet.

LÖSUNG:

(a) Die Abbildung $F : L^2([-\pi,\pi]) \to L^2([-\pi,\pi])$, $F(f)(x) = f(x) + f(-x)$, ist linear und stetig,

$$\|F(f)\|_2 = \|f - f(-\cdot)\|_2 \le \|f\|_2 + \|f\|_2 = 2\|f\|_2,$$

also sogar Lipschitz-stetig mit Konstante 2. Da offenbar $U$ der Kern von $F$, also das stetige Urbild der Nullfunktion ist, $U = F^{-1}(\{0\})$, ist $U$ abgeschlossen.

(b) Wegen $s_n = \frac{\sqrt{2}}{2\mathrm{i}}(e_n - e_{-n})$ folgt für alle $m,n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\langle s_m, s_n\rangle &= \tfrac{1}{2}\langle e_m - e_{-m}, e_n - e_{-n}\rangle = \tfrac{1}{2}\big(\langle e_m, e_n\rangle - \langle e_{-m}, e_n\rangle - \langle e_m, e_{-n}\rangle + \langle e_{-m}, e_{-n}\rangle\big)\\ &= \tfrac{1}{2}\big(\delta_{m,n} - \delta_{-m,n} - \delta_{m,-n} + \delta_{m,n}\big) = \delta_{m,n}.\end{aligned}$$

Die $s_n$ bilden also eine orthonormale Familie.
Für die Vollständigkeit ist noch zu zeigen, dass für $f \in U$ aus $\langle s_n, f\rangle = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ schon $f = 0$ folgt.
Sei also $f \in U$ mit $\langle s_n, f\rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt also

$$0 = \langle e_n, f\rangle - \langle e_{-n}, f\rangle.$$

Da $x \mapsto e_n(x) + e_{-n}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cos(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine gerade reelle Funktion ist, gilt

$$0 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \overline{(e_n(x) + e_{-n}(x))} f(x)\mathrm{d}x = \langle e_n, f\rangle + \langle e_{-n}, f\rangle.$$

Insbesondere erhalten wir für $n = 0$, $\langle e_0, f\rangle = 0$ und durch Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen, $\langle e_n, f\rangle = 0$, $\langle e_{-n}, f\rangle = 0$ für $n \in \mathbb{N}$, Insgesamt erhalten wir also $\langle e_n, f\rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Da die $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine ONB des $L^2([-\pi,\pi])$ bilden, folgt $f = 0$. $\square$