Zentralübung

Z12.1. Fréchet-Riesz-Darstellungssatz

Bestimmen Sie für die gegebenen Hilberträume $\mathcal{H}$ und linearen Funktionale $f : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ jeweils einen Vektor $\psi \in \mathcal{H}$, so dass $f(\phi) = \langle \psi, \phi \rangle$ für alle $\phi \in \mathcal{H}$ gilt.

(a) $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3$, $f(\phi) = 2\phi_1 - \mathrm{i}\phi_3$.

(b) $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit dem Skalarprodukt $\langle A, B \rangle = \overline{A_{11}}B_{11} + \overline{A_{12}}B_{12} + \overline{A_{21}}B_{21} + \overline{A_{22}}B_{22}$ und $f(B) = \mathrm{i}(B_{12} - B_{21})$.

(c) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, $f(\phi) = (1 + \mathrm{i}) \int\limits_{-1}^{1} \phi(x)\mathrm{d}x$.

(d) $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$, $f(\phi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n}{n}$.

Warum sind die linearen Funktionale stetig?

Z12.2. Konvergenz im Prähilbertraum

Sei (x_n) eine orthogonale Folge in einem Prähilbertraum $\mathcal{H}$, d.h. $\langle x_n, x_m \rangle = 0$ für $n \neq m$.

(a) Zeigen Sie: Ist die Folge (x_n) konvergent, so ist ihr Grenzwert 0.

(b) Zeigen Sie: Ist (x_n) orthonormal, so ist (x_n) nicht konvergent.

(c) Geben Sie konkret eine orthogonale Folge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to 0$ an.

Z12.3. Vollständigkeit der Hermite-Funktionen in $L^2(\mathbb{R})$

Die Hermite-Funktionen $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, aus Aufgabe H9.2.(e) bilden eine Familie orthnormaler Funktionen in $L^2(\mathbb{R})$. Sie sind von der Form $h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$, wobei H_n jeweils ein Polynom vom Grad n ist. Man zeige:

(a) Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ beliebig. Dann ist

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{zx}\mathrm{d}x$$

eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

(b) Für die Funktion F aus (a) gilt $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \frac{x^n}{n!}\mathrm{d}x$.

(c) Es gelte für $f \in L^2(\mathbb{R})$, dass $\langle h_n, f \rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $f = 0$. Dies bedeutet, dass die Hermite-Funktionen eine Orthonormalbasis in $L^2(\mathbb{R})$ bilden.

Präsenzaufgaben

P12.1. Orthogonalität und lineare Unabhängigkeit

Zeigen Sie: Ist $E \subseteq \mathcal{H} \setminus \{0\}$ eine Menge paarweise zueinander orthogonaler Vektoren im Prähilbertraum $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, so ist E eine linear unabhängige Menge von Vektoren.

P12.2. Orthonormalbasis für symmetrische periodische Funktionen

Auf $L^2([-\pi, \pi])$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) \mathrm{d}x$ bilden die Funktionen $e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ eine Orthonormalbasis (genauso, wie auf $L^2([0, 2\pi])$). Zeigen Sie,

(a) dass der Unterraum der ungeraden Funktionen

$$U := \{f \in L^2([-\pi, \pi]) \,|\, \forall x \in [-\pi, \pi] : f(-x) = -f(x)\}$$

abgeschlossen ist,

(b) dass $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $s_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$, eine Orthonormalbasis von U bildet.