Präsenzaufgaben

P11.1. Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Parallelogrammgleichung

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum über $\mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$. Dann gilt für alle $\phi,\psi\in\mathcal{H}$:

(a) $|\langle\phi,\psi\rangle| \le \|\phi\|\,\|\psi\|$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

(b) $\|\phi+\psi\|^2 + \|\phi-\psi\|^2 = 2\|\phi\|^2 + 2\|\psi\|^2$ (Parallelogrammgleichung)

HINWEIS zu (a): Bestimmen Sie $\alpha\in\mathbb{C}$, so dass $\psi-\alpha\phi$ senkrecht auf ϕ steht und berechnen dann die Länge von $\psi-\alpha\phi$.

LÖSUNG:

(a) Ist $\phi=0$, so ist nichts zu zeigen. Für beliebiges $\alpha\in\mathbb{C}$ gilt allgemein

$$0 \le \|\psi-\alpha\phi\|^2 = \langle\psi-\alpha\phi,\psi-\alpha\phi\rangle = \langle\psi,\psi\rangle - \alpha\langle\psi,\phi\rangle - \overline{\alpha}\langle\phi,\psi\rangle + |\alpha|^2\langle\phi,\phi\rangle$$

Fordert man $\langle\phi,\psi-\alpha\phi\rangle = 0$, so folgt, wenn $\phi\ne 0$, dass $\alpha = \frac{\langle\phi,\psi\rangle}{\langle\phi,\phi\rangle}\in\mathbb{C}$ ist.
Geometrisch gesehen wird α genau so gewählt, dass $\psi-\alpha\phi$ senkrecht auf der von ϕ aufgespannten komplexen Ebene steht.
Eingesetzt in obige Ungleichung erhält man schließlich

$$0 \le \langle\psi,\psi\rangle - 2\frac{\langle\phi,\psi\rangle\langle\psi,\phi\rangle}{\langle\phi,\phi\rangle} + \frac{|\langle\psi,\phi\rangle|^2}{|\langle\phi,\phi\rangle|^2}\langle\phi,\phi\rangle = \langle\psi,\psi\rangle - \frac{|\langle\psi,\phi\rangle|^2}{\langle\phi,\phi\rangle},$$

beziehungsweise, $|\langle\psi,\phi\rangle|^2 \le \langle\psi,\psi\rangle\langle\phi,\phi\rangle$, was durch beidseitiges Wurzelziehen die Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt.

(b) Wegen der Definition der Norm $\|\phi\|^2 = \langle\phi,\phi\rangle$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\|\phi+\psi\|^2 + \|\phi-\psi\|^2 &= \langle\phi+\psi,\phi+\psi\rangle + \langle\phi-\psi,\phi-\psi\rangle\\ &= 2\|\phi\|^2 + \langle\phi,\psi\rangle + \langle\psi,\phi\rangle - \langle\phi,\psi\rangle - \langle\psi,\phi\rangle + 2\|\psi\|^2\\ &= 2\|\phi\|^2 + 2\|\psi\|^2.\end{aligned}$$

P11.2. Polarisationsidentität

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Die Polarisationsidentität lautet:

$$\langle\phi,\psi\rangle = \frac{1}{4}\sum_{r\in\{z\in\mathbb{K}\,|\,z^4=1\}} r\|r\phi+\psi\|^2$$

Beweisen Sie, dass diese für alle $\phi,\psi\in\mathcal{H}$ gilt, im Fall (a) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ und (b) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

LÖSUNG:

(a) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lautet die Polarisationsidentität

$$\langle \phi, \psi \rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|\phi + \psi\|^2 - \|-\phi + \psi\|^2\big).$$

Wir berechnen wegen $\langle \phi, \psi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle$

$$\begin{aligned}\|\phi + \psi\|^2 - \|-\phi + \psi\|^2 &= \langle \phi + \psi, \phi + \psi \rangle - \langle -\phi + \psi, -\phi + \psi \rangle \\ &= \langle \phi, \phi \rangle + 2\langle \phi, \psi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle - \Big(\langle \phi, \phi \rangle - 2\langle \phi, \psi \rangle + \langle \psi, \psi \rangle\Big) \\ &= 4\langle \phi, \psi \rangle.\end{aligned}$$

(b) Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist zu zeigen:

$$\langle \phi, \psi \rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|\phi + \psi\|^2 - \|-\phi + \psi\|^2 + \mathrm{i}\|\mathrm{i}\phi + \psi\|^2 - \mathrm{i}\|-\mathrm{i}\phi + \psi\|^2\big).$$

Wegen $\langle \mathrm{i}\phi, \mathrm{i}\psi \rangle = (-\mathrm{i})\langle \phi, \mathrm{i}\psi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle$ gilt

$$\begin{aligned} & \|\phi + \psi\|^2 - \| - \phi + \psi\|^2 + \mathrm{i}\|\mathrm{i}\phi + \psi\|^2 - \mathrm{i}\| - \mathrm{i}\phi + \psi\|^2 \\ = \;& \|\phi\|^2 + \langle \phi, \psi \rangle + \langle \psi, \phi \rangle + \|\psi\|^2 \\ & -\|\phi\|^2 - \langle -\phi, \psi \rangle - \langle \psi, -\phi \rangle - \|\psi\|^2 \\ & \mathrm{i}\|\phi\|^2 + \mathrm{i}\langle \mathrm{i}\phi, \psi \rangle + \mathrm{i}\langle \psi, \mathrm{i}\phi \rangle + \mathrm{i}\|\psi\|^2 \\ & -\mathrm{i}\|\phi\|^2 - \mathrm{i}\langle -\mathrm{i}\phi, \psi \rangle - \mathrm{i}\langle \psi, -\mathrm{i}\phi \rangle - \mathrm{i}\|\psi\|^2 \\ = \;& 2\langle \phi, \psi \rangle + 2\langle \psi, \phi \rangle + 2\mathrm{i}\langle \mathrm{i}\phi, \psi \rangle + 2\mathrm{i}\langle \psi, \mathrm{i}\phi \rangle \\ = \;& 4\langle \phi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Bemerkung: Umgekehrt kann man — etwas aufwändiger — zeigen, dass auf jedem normierten Raum, in dem die Parallelogrammgleichung gilt, mittels der Polarisationsidentität ein Skalarprodukt definiert werden kann. Prähilberträume sind also genau diejenigen normierten Räume, in denen die Parallelogrammgleichung gilt.

P11.3. Nichtabgeschlossene Unterräume im Hilbertraum

Sei $V := \{\psi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \mid \exists N \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq N : \psi_n = 0\}$. Zeigen Sie:

(a) V ist ein Unterraum des $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, aufgespannt von den Einheitsvektoren $\mathrm{e}_i \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$, $e_i = ((e_i)_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(e_i)_n = \delta_{i,n}$, für $i \in \mathbb{N}_0$.

(b) Welche Norm hat der Vektor $\phi := (\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}_0}$?

(c) V ist nicht abgeschlossen und $\overline{V} = \ell^2(\mathbb{N}_0)$.

(d) Sei nun $V_1 := \{\psi \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \mid \psi_0 = 0 \wedge \exists N \in \mathbb{N}_0 \forall n \geq N : \psi_n = 0\}$. Zeigen Sie, dass ϕ keine orthogonale Projektion auf V_1 besitzt.

LÖSUNG:

(a) Sind $\psi, \phi \in V$, dann offensichtlich auch $\alpha\phi + \psi$. Wegen $0 \in V$ ist V ein Unterraum. Jede Linearkombination von Einheitsvektoren ist eine **endliche** Summe, $\alpha_0\mathrm{e}_0 + \cdots + \alpha_N\mathrm{e}_n = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N, 0, \ldots) \in V$. Ist andererseits $\psi \in V$, dann gibt es $N \in \mathbb{N}_0$, so dass $\psi = \psi_0\mathrm{e}_0 + \cdots + \psi_N\mathrm{e}_N \in \mathrm{span}\big(\{\mathrm{e}_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}\big) \subseteq \ell^2(\mathbb{N}_0)$.

(b) Es gilt $\|\phi\|^2 = \langle \phi, \phi \rangle = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{\phi_n}\phi_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |\phi_n|^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$, also $\|\phi\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

(c) Für ϕ aus (b) gilt offensichtlich $\phi \in \ell^2(\mathbb{N}_0) \setminus V$. Aber $\phi^{(i)} \in V$ für $\phi_n^{(i)} = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, & n \leq i, \\ 0, & n > i. \end{cases}$

Weiter gilt $\|\phi^{(i)} - \phi\|^2 = \sum\limits_{n=i+1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \xrightarrow{i\to\infty} 0$, Es gilt also $V \in \phi^{(i)} \xrightarrow{i\to\infty} \phi \notin V$, was beweist,

dass V nicht abgeschlossen ist.
V liegt aber dicht in $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, denn:
Sei $\psi \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ beliebig, also $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\psi_n|^2 < \infty$. Dann ist $\psi^{(i)} := (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_i, 0, \dots)$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ in V enthalten und wegen $\|\psi^{(i)} - \psi\|^2 = \sum\limits_{n=i+1}^{\infty} |\psi_n|^2 \xrightarrow{i\to\infty} 0$ konvergiert $(\psi^{(i)})_{i\in\mathbb{N}_0}$ gegen ψ.

(d) Annahme: Es gibt eine orthogonale Projektion ϕ_1 von ϕ auf V_1. D.h. $\phi_1 \in V_1$ und $\phi - \phi_1 \perp \psi$ für alle $\psi \in V_1$. Sei $phi_1 = (0, \phi_{1,1}, \dots, \phi_{1,n}, 0, \dots)$ mit einem $n \in \mathbb{N}$. Für $\psi_n = (0, 1, \dots, 1, 0, \dots) \in V_1$ mit n Einsen gilt also $\langle \psi_n, \phi - \phi_1 \rangle = 0$. Dann ist aber auch $\psi_n = (0, 1, \dots, 1, 1, 0, \dots)$ mit $n + 1$ Einsen in V_1. Aber

$$\langle \psi_{n+1}, \phi - \phi_1 \rangle = \langle \psi_n + e_{n+1}, \phi - \phi_1 \rangle = \langle e_{n+1}, \phi - \phi_1 \rangle = \langle e_{n+1}, \phi \rangle = \frac{1}{2^{n+1}} \neq 0,$$

ein Widerspruch.