Prof. Dr. M. Wolf
Dr. S. Kaniber
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2020W

Wintersem. 2020/21
Blatt 11
(29.01.2021)

Präsenzaufgaben

P11.1. Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Parallelogrammgleichung

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum über $\mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$. Dann gilt für alle $\phi,\psi\in\mathcal{H}$:

(a) $|\langle\phi,\psi\rangle| \le \|\phi\|\,\|\psi\|$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

(b) $\|\phi+\psi\|^2+\|\phi-\psi\|^2 = 2\|\phi\|^2+2\|\psi\|^2$ (Parallelogrammgleichung)

Hinweis zu (a): Bestimmen Sie $\alpha\in\mathbb{C}$, so dass $\psi-\alpha\phi$ senkrecht auf ϕ steht und berechnen dann die Länge von $\psi-\alpha\phi$.

P11.2. Polarisationsidentität

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Die Polarisationsidentität lautet:

$$\langle\phi,\psi\rangle = \tfrac{1}{4}\sum_{r\in\{z\in\mathbb{K}\,|\,z^4=1\}} r\|r\phi+\psi\|^2$$

Beweisen Sie, dass diese für alle $\phi,\psi\in\mathcal{H}$ gilt, im Fall (a) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ und (b) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

P11.3. Nichtabgeschlossene Unterräume im Hilbertraum

Sei $V := \{\psi\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}\,|\,\exists N\in\mathbb{N}_0\forall n\ge N : \psi_n=0\}$. Zeigen Sie:

(a) V ist ein Unterraum des $\ell_2(\mathbb{N}_0)$, aufgespannt von den Einheitsvektoren $\mathrm{e}_i\in\ell_2(\mathbb{N}_0)$, $e_i=((e_i)_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(e_i)_n=\delta_{i,n}$, für $i\in\mathbb{N}_0$.

(b) Welche Norm hat der Vektor $\phi := (\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}_0}$?

(c) V ist nicht abgeschlossen und $\overline{V}=\ell_2(\mathbb{N}_0)$.

(d) Sei nun $V_1 := \{\psi\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}\,|\,\psi_0=0\wedge\exists N\in\mathbb{N}_0\forall n\ge N : \psi_n=0\}$. Zeigen Sie, dass ϕ keine orthogonale Projektion auf V_1 besitzt.