Prof. Dr. M. Wolf
Dr. S. Kaniber
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)
www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2020W

Wintersem. 2020/21
Lösungsblatt 10
(22.01.2021)

Zentralübung

Z10.1. Eigenschaften der Faltung

Seien $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann gilt

(a) **(Kommutativität)** $f * g = g * f$,

(b) **(Assoziativität)** $(f * g) * h = f * (g * h)$,

(c) **(Distributivität)** $f * (g + h) = f * g + f * h$,

(d) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Lösung:

(a) $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \in \mathbb{C}$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. In diesem Fall ist
$g * f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y \overset{\tilde{y}=x-y}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-\tilde{y})g(\tilde{y})\mathrm{d}\tilde{y} = f * g(x)$

(b) Wir wissen aus der Vorlesung, dass $f * g$ und $g * h$ wieder in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegen. Somit gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x-y)h(y)\mathrm{d}^n y = \iint f((x-y)-z)g(z)h(y)\mathrm{d}^n z\mathrm{d}^n y, \\
(f * (g * h))(x) &= \int f(x-y)(g * h)(y)\mathrm{d}^n y = \iint f(x-y)g(y-z)h(z)\mathrm{d}^n z\mathrm{d}^n y \\
&\overset{\substack{\tilde{y}=z \\ \tilde{z}=y-z}}{=} \iint f(x-(\tilde{y}+\tilde{z}))g(\tilde{z})h(\tilde{y})\mathrm{d}^n\tilde{z}\mathrm{d}^n\tilde{y}.
\end{aligned}$$

(c) Wenn beide Seiten existieren, ist

$$\begin{aligned}
f * (g + h)(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)(g(y)+h(y))\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y + \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)h(y)\mathrm{d}y \\
&= f * g(x) + f * h(x)
\end{aligned}$$

Dies ist aber (jeweils) für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ der Fall.

(d) Es ist

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &= \int \left| \int f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \leq \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x-y)g(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}x \overset{\substack{\tilde{x}=x-y \\ \tilde{y}=y}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} |f(\tilde{x})g(\tilde{y})|\mathrm{d}\tilde{y}\mathrm{d}\tilde{x} \\
&\overset{\text{Fub}}{=} \int |f(x)|\mathrm{d}x \int |g(y)|\mathrm{d}y = \|f\|_1\|g\|_1.
\end{aligned}$$

Z10.2. Faltung und Differenzierbarkeit

Seien $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger. Zeigen Sie, dass $u * f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(u * f)^{(k)}(x) = (u^{(k)} * f)(x).$$

LÖSUNG:

Erinnerung: Aufgabe Z8.2.(b) besagt (Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\mathbb{R}} g(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \partial_1 g(x,y)\mathrm{d}y,$$

falls $y \mapsto g(x,y)$ und $y \mapsto \partial_1 g(x,y)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ integrierbar sind und wenn es ein integrierbares $y \mapsto h(y)$ gibt, so dass für alle x und y gilt $|\partial_1 g(x,y)| < h(y)$. (Majorante)
Nun gilt für $g(x,y) := u(x-y)f(y)$, dass $\partial_1 g(x,y) = u'(x-y)f(y)$. Da u kompakten Träger hat und u, u' stetig sind, sind u und u' beschränkt, z.B. durch $C > 0$. Somit gilt für beliebiges $x \in \mathbb{R}$, dass wegen $|g(x,y)| = |u(x-y)f(y)| \leq C|f(y)|$ und $|\partial_1 g(x,y)| = |u'(x-y)f(y)| \leq C|f(y)|$ sowohl $y \mapsto g(x,y)$ und $y \mapsto \partial_1 g(x,y)$ integrierbar sind.
Schließlich ist mit $h(y) := C|f(y)|$ die Funktion h integrierbar ($h \in L^1(\mathbb{R})$) und es gilt $\forall x, y \in \mathbb{R} : |\partial_1 g(x,y)| \leq h(y)$. Somit dürfen Integration und Differentiation vertauscht werden und es gilt

$$\begin{aligned}(u*f)'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_{\mathbb{R}} u(x-y)f(y)\mathrm{d}y = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\Big(u(x-y)f(y)\Big)\mathrm{d}y \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} u'(x-y)f(y)\mathrm{d}y = (u'*f)(x).\end{aligned}$$

Dies beweist insbesondere, dass $u*f$ differenzierbar ist. Da auch $u' \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist und kompakten Träger hat, folgt mit dem selben Argument, dass auch $u'*f$ und damit $(u*f)'$ differenzierbar ist. Iteriert erhält man, dass $u*f$ unendlich oft differenzierbar ist mit

$$(u*f)^{(k)}(x) = (u^{(k)}*f)(x).$$

Z10.3. Diffusionsgleichung mit Drift

Lösen Sie die Diffusionsgleichung mit Drift,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = D\Delta\rho(x,t) + v\cdot\nabla\rho(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

mit $D > 0$, $v \in \mathbb{R}^n$, für die Anfangsbedingung $\rho(x,0) = \rho_0(x)$, wobei $\rho_0, \widehat{\rho_0} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
HINWEIS: Bestimmen Sie $G_t(x)$, so dass $\rho(x,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(G_t * \rho_0)(x)$ mit Hilfe der Fouriertransformation bezüglich x, wie in der Vorlesung.

LÖSUNG:

Wir setzen an $\rho(x,t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\hat{\rho}(k,t)\mathrm{d}k$. Wir fordern für $\hat{\rho}$ nun die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(k,t) = -D\|k\|^2\hat{\rho}(k,t) + \mathrm{i}(v\cdot k)\hat{\rho}(k,t), \quad \text{wobei } \hat{\rho}(k,0) = \widehat{\rho_0}(k).$$

Sie ergibt sich aus der Diffusionsgleichung, indem man jede partielle Ableitung ∂_j durch $\mathrm{i}k_j$ und ρ durch $\hat{\rho}$ ersetzt. Für jedes $k \in \mathbb{R}^n$ ist dies ein AWP einer linearer Differentialgleichung erster Ordnung, mit der Lösung

$$\hat{\rho}(k,t) = \underbrace{\mathrm{e}^{-tD\|k\|^2 + \mathrm{i}t(v\cdot k)}}_{=:\widehat{G_t}(k)}\widehat{\rho_0}(k),$$

die für alle $t \geq 0$ stetig und wieder in L^1 ist. Für $v = 0$ ist die Rücktransformierte $(2tD)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4tD}}$. Aus den elementaren Eigenschaften der Verschiebung, $\widehat{f_{x_0}}(k) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x_0}\widehat{f}(k)$ für $f_{x_0}(x) = f(x-x_0)$, folgt

$$G_t(x) = (2tD)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\|x+tv\|^2}{4tD}},$$

d.h. G_t ist eine sich verbreiternde Gauss-Glocke, deren Zentrum sich mit konstanter Geschwindigkeit v nach links bewegt. Da G_t in L^1 liegt, ist auch $G_t * \rho_0$ in L^1 und

$$\begin{aligned}
\rho(x,t) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} \widehat{G_t}(k)\widehat{\rho_0}(k)\mathrm{d}k = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} \widehat{G_t * \rho_0}(k)\mathrm{d}k = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (G_t * \rho_0)(x) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y)\rho_0(y)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

ist eine Lösung der Diffusionsgleichung mit Drift.
BEMERKUNG: Durch direktes Ausrechnen kann man überprüfen, dass $G_t(x)$ für $t > 0$ in der Tat eine Lösung der Diffusionsgleichung mit Drift ist. Die Verallgemeinerung von Z10.2. auf den $\mathbb{R}^n$ ergibt $\partial^\alpha(\phi_0 * G_t) = \phi_0 * \partial^\alpha G_t$. Somit ist auch $G_t * \phi_0$ eine Lösung der selben Differentialgleichung.

Präsenzaufgaben

P10.1. Faltung

Berechnen und skizzieren Sie die Faltung von $\chi_{[-5,5]}$ mit
(i) $\frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$, (ii) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$, (iii) $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ und (iv) $\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

LÖSUNG:

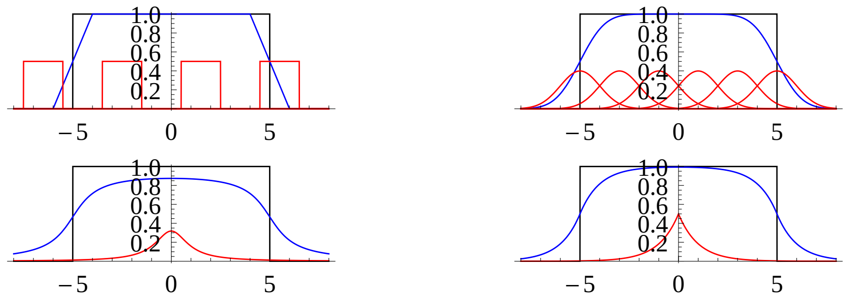
(i) Es gilt

$$\begin{aligned}
(\chi_{[-5,5]} * \tfrac{1}{2}\chi_{[-1,1]})(x) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-5,5]}(x-y)\tfrac{1}{2}\chi_{[-1,1]}(y)\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \chi_{[-5,5]}(x-y)\mathrm{d}y \\
&\overset{s=x-y}{=} \tfrac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} \chi_{[-5,5]}(s)\mathrm{d}y = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le -6, \\ \frac{1}{2}(x+6) & \text{für } -6 < x \le -4, \\ 1 & \text{für } -4 < x \le 4, \\ \frac{1}{2}(6-x) & \text{für } 4 < x \le 6, \\ 0 & \text{für } 6 < x, \end{cases}
\end{aligned}$$

(ii) $(\chi_{[-5,5]} * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-5,5]}(x-y)g(y)\mathrm{d}y = \int_{-5}^{5} g(x-y)\mathrm{d}y = \int_{x-5}^{x+5} g(y)\mathrm{d}y$
$= \mathrm{erf}(x+5) - \mathrm{erf}(x-5)$, wobei $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ und erf die Stammfunktion von g mit $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{erf}(x) = 0$ ist.

(iii) $(\chi_{[-5,5]} * g)(x) = \int_{x-5}^{x+5} g(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\arctan(x+5) - \frac{1}{\pi}\arctan(x-5)$, wobei $g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ und $\frac{1}{\pi}\arctan'(x) = g(x)$.

(iv) $(\chi_{[-5,5]} * g)(x) = \int_{x-5}^{x+5} g(y)\mathrm{d}y = G(x+5) - G(x-5)$, wobei $g(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ mit der Stammfunktion $G(x) = \frac{1}{2}e^{x}\chi_{(-\infty,0]}(x) + (1 - \frac{1}{2}e^{-x})\chi_{(0,\infty)}(x)$.



P10.2. Inhomogene lineare Differentialgleichung und Fouriertransformation

Gegeben sei die Differentialgleichung $\ddot{x}(t) = \frac{1}{4}x(t) + f(t)$ mit $f(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$.

(a) Wie lauten die Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung?

(b) Finden Sie eine spezielle Lösung $x_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ der inhomogenen Differentialgleichung mit Hilfe der Fouriertransformation.

(c) Geben Sie eine spezielle Lösung $x_1(t)$ an, deren Asymptotik für $t \to -\infty$ mit $f(t)$ übereinstimmt (d.h. $\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{x_1(t)}{f(t)}$ existiert).

Lösung:

(a) $x(t) = c_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + c_2 \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Ist $x_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$, so gilt im Fourierraum $-k^2\widehat{x_0}(k) = \frac{1}{4}\widehat{x_0}(k) + \widehat{f}(k)$, bzw., für alle $k \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{x_0}(k) = -\frac{\widehat{f}(k)}{k^2 + \frac{1}{4}} = -\widehat{g}(k)\widehat{f}(k),$$

wobei $\widehat{g}(k) = \frac{1}{k^2+\frac{1}{4}}$ und, bekannterweise $\widehat{f}(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+k^2}$.

Somit ist $\widehat{x_0}(k) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{(k^2+\frac{1}{4})(k^2+1)}$. Rücktransformation ergibt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}_{\mathrm{i}}(\widehat{x_0}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}) + \mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2}(\widehat{x_0}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}))\right) = 2\mathrm{i}(-\tfrac{2\mathrm{i}}{3}\mathrm{e}^{-t} + \tfrac{4\mathrm{i}}{3}\mathrm{e}^{-t/2}) \\ &= \tfrac{4}{3}(\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-t/2}) \end{aligned}$$

und für $t < 0$

$$\begin{aligned} x_0(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}_{-\mathrm{i}}(\widehat{x_0}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}) + \mathrm{Res}_{-\mathrm{i}/2}(\widehat{x_0}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\right) = 2\mathrm{i}(\tfrac{2\mathrm{i}}{3}\mathrm{e}^{t} - \tfrac{4\mathrm{i}}{3}\mathrm{e}^{t/2}) \\ &= \tfrac{4}{3}(\mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{t/2}) \end{aligned}$$

Insgesamt also $x_0(t) = \frac{4}{3}(\mathrm{e}^{-|t|} - 2\mathrm{e}^{-|t|/2})$.

(c) Durch geeignete Wahl einer homogenen Lösung kann die Dominierende Asymptotik für negative t, $-\frac{8}{3}\mathrm{e}^{t/2}$, kompensiert werden:

$$x_1(t) = \tfrac{8}{3}\mathrm{e}^{t/2} + x_0(t) = \begin{cases} \tfrac{4}{3}\mathrm{e}^{t} & \text{für } t < 0, \\ \tfrac{4}{3}(\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-t/2} + 2\mathrm{e}^{t/2}) = \tfrac{4}{3}(\mathrm{e}^{-t} + 4\sinh(t)) & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

P10.3. Eindimensionale Wellengleichung

Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $c > 0$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation bezüglich x eine Lösung der Wellengleichung $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$ mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$, $\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = g(x)$.

Lösung:

Die Fouriertransformierte bezüglich x von $u(x,t)$ für festes t sei $\widehat{u}(k,t)$. Erfüllt u die Wellengleichung, so gilt

$$\partial_t^2\widehat{u}(k,t) = -c^2k^2\widehat{u}(k,t)$$

mit den Anfangsbedingungen $\widehat{u}(k,0) = \widehat{f}(k)$ und $\partial_t\widehat{u}(k,0) = \widehat{g}(k)$.

Für jedes feste k ist das jeweils eine gewöhnliche Differentialgleichung in t.

Für $k = 0$ ist $\widehat{u}(0,t) = \widehat{f}(k) + \widehat{g}(k)t$ die Lösung des Anfangswertproblems.

Für $k \neq 0$ erhalten wir die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} \widehat{u}(k,t) &= a(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kct} + b(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kct}, \\ \partial_t\widehat{u}(k,t) &= \mathrm{i}kca(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kct} - \mathrm{i}kcb(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kct}. \end{aligned}$$

$a(k)$ und $b(k)$ ergeben sich aus den Anfangsbedingungen,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \widehat{u}(k,0) = a(k) + b(k), \\ \widehat{g}(k) &= \partial_t \widehat{u}(k,0) = \mathrm{i}kc(a(k) - b(k)), \end{aligned}$$

bzw.,

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{2}\widehat{f}(k) + \frac{1}{2\mathrm{i}kc}\widehat{g}(k), \\ b(k) &= \frac{1}{2}\widehat{f}(k) - \frac{1}{2\mathrm{i}kc}\widehat{g}(k). \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} \widehat{u}(k,t) &= (\tfrac{1}{2}\widehat{f}(k) + \tfrac{i}{2kc}\widehat{g}(k))\mathrm{e}^{\mathrm{i}kct} + (\tfrac{1}{2}\widehat{f}(k) - \tfrac{i}{2kc}\widehat{g}(k))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kct} \\ &= \widehat{f}(k)\cos(kct) + \frac{1}{kc}\widehat{g}(k)\sin(kct) \end{aligned}$$

Diese Funktion ist für alle t wieder in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, da $\frac{\sin(kct)}{kc}$ bei $k = 0$ durch t holomorph fortgesetzt wird. Somit ist die Rücktransformation bezüglich k von $\widehat{u}(k,t)$ eine Lösung der Wellengleichung.

Zur Illustration zwei Beispiele:

(i) $g(x) = 0$. Dann ist $\widehat{u}(k,t) = \frac{1}{2}\widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kct} + \frac{1}{2}\widehat{f}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kct}$ und somit

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x - ct) + \frac{1}{2}f(x + ct).$$

Die Anfangskonfiguration f läuft zu gleichen Teilen mit der Geschwindigkeit $\pm c$ nach links und rechts.

(ii) $b(k) = 0$, d.h., $\widehat{g}(k) = \mathrm{i}kc\widehat{f}(k)$, bzw., $g(x) = cf'(x)$. Dann ist $a(k) = \widehat{f}(k)$, $\widehat{u}(k,t) = \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kct}$ und somit

$$u(x,t) = f(x + ct).$$

Die Änderungsgeschwindigkeit der Anfangskonfiguration in t ist genau so eingestellt, dass sich die Anfangskonfiguration unverformt mit der Geschwindigkeit c nach links bewegt.

Hausaufgaben

H10.1. Fouriertransformation von Gaußkurven

(a) Wie wurde in der Vorlesung die Faltung $f * g$ zweier Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ definiert?

(b) Wie lautet die Fouriertransformierte der Gauß-Kurve $x \mapsto \exp(-\frac{x^2}{2t})$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$?

(c) Beweisen Sie, dass die Faltung $h = f_1 * f_2$ zweier Gauß-Kurven, $f_j(x) = \exp(-\frac{x^2}{2t_j})$, $t_j > 0$, $j = 1, 2$, wieder eine Gauß-Kurve ist. Berechnen Sie h.

LÖSUNG:

(a) $f * g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)\mathrm{d}y$.

(b) Allgemein ist für $f(x) = \exp(\frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle)$ die Fouriertransformierte $\hat{f}(k) = (\det A)^{-1/2}\exp(-\frac{1}{2}\langle k, A^{-1}k\rangle)$ mit $x, k \in \mathbb{R}^n$. Hier ist $n = 1$ und $A = \frac{1}{t} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$. Also ist $\hat{f}(k) = \sqrt{t}\exp(-\frac{1}{2}tk^2)$, $k \in \mathbb{R}$.

(c) Hier gilt der Faltungssatz $\widehat{f_1 * f_2} = \sqrt{2\pi}\widehat{f_1}\widehat{f_2}$, d.h.

$$\widehat{f_1 * f_2}(k) = \sqrt{2\pi}\sqrt{t_1 t_2}\exp(-\tfrac{1}{2}(t_1+t_2)k^2)$$

also eine Gaußkurve. Ihre Rücktransformation ist also wieder eine Gaußkurve,

$$h(x) = f_1 * f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{ikx}\widehat{f_1 * f_2}(k)\mathrm{d}k = \sqrt{2\pi\frac{t_1 t_2}{t_1+t_2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{t_1+t_2}\right).$$

H10.2. Fouriertransformation in $L^2(\mathbb{R})$

Sei $f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x-1|}$, $\alpha > 0$.

(a) Begründen Sie, warum $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ ist.

(b) Berechnen Sie $\widehat{f}(k)$.

Lösung:

(a) Da f offenbar quadratintegrabel ist und die Fouriertransformation unitär auf dem Raum der quadratintegrablen Funktionen wirkt ist $\widehat{f}$ auch quadratintegrabel, oder explizit (b), der Abfall von $|\widehat{f}(k)|^2$ ist $\mathcal{O}(k^{-4})$ für $|k| \to \infty$.

(b)

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha(x-1)-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{1} \mathrm{e}^{\alpha(x-1)-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{\alpha}\left[\frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{i}k)x}}{-(\alpha+\mathrm{i}k)}\right]_1^{\infty} + \mathrm{e}^{-\alpha}\left[\frac{\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}k)x}}{(\alpha-\mathrm{i}k)}\right]_{-\infty}^{1} \\
&= -\mathrm{e}^{\alpha}\frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{i}k)}}{-(\alpha+\mathrm{i}k)} + \mathrm{e}^{-\alpha}\frac{\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}k)}}{(\alpha-\mathrm{i}k)} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}}{\alpha+\mathrm{i}k} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}}{\alpha-\mathrm{i}k} \\
&= \frac{2\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}}{\alpha^2+k^2}.
\end{aligned}$$

also

$$\widehat{f}(k) = \frac{2\alpha}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}}{\alpha^2+k^2}.$$

H10.3. Inverse Fouriertransformation

(a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

(b) Benutzen Sie (a) um zu zeigen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi$ gilt.

Hinweis: Warum ist hier $\check{\hat{f}} = f$?

LÖSUNG:

(a) Die Fouriertransformierte von f lautet (partielle Integration)

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{0} \mathrm{d}x\,(1+x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1} \mathrm{d}x\,(1-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \\
&= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1} \mathrm{d}x\,(1-x)\cos(kx) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-\cos k}{k^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin(k/2)}{k/2}\right)^2 .
\end{aligned}$$

(b) Da f und $\hat{f}$ in L^1 sind ($\hat{f}$ fällt schnell genug ab) und f stetig ist, gilt $\check{\hat{f}}(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. D.h. es gilt $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \hat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$. Insbesondere ist

$$1 = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \hat{f}(k)\mathrm{d}k = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin(k/2)}{k/2}\right)^2 \mathrm{d}k \overset{x=\frac{k}{2}}{=} 2\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x,$$

woraus die Behauptung folgt.