TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. S. KANIBER
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)
www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2020W

Wintersem. 2020/21
Lösungsblatt 9
(15.01.2021)

Zentralübung

Z9.1. $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist ein Banachraum

Zeige, dass $L^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)/\sim$ mit $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ messbar} | \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty\}$ und der Äquivalenzrelation $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ fast überall, mit der Norm

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}$$

für $p \geq 1$ ein Banachraum ist.

LÖSUNG:

Ein Banachraum ist ein vollständiger normierter Raum. Es ist also zu zeigen, dass jede Cauchy-Folge in $L^p(\mathbb{R}^n)$ einen Grenzwert in $L^p(\mathbb{R}^n)$ besitzt.
Sei $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann kann man eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ finden, so dass (Konvergenzbeschleunigung)

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_p \leq 2^{-k}.$$

Man setzt

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)),$$

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

mit den zugehörigen Partialsummen $S_K(f) = f_{n_K}$ (Teleskopsumme) und $S_K(g)$. g und f sind wohldefiniert, denn aus der Dreiecksungleichung folgt, dass

$$\|S_K(g)\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^{K-1} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^{K-1} 2^{-k}.$$

Für $K \to \infty$ folgt $\|g\|_p < \infty$ wegen monotoner Konvergenz von $S_K(g)$ gegen g. Aus Aufgabe Z10.1. (Vertauschen von Summe und Integral) folgt dann, dass die g definierende Reihe fast überall konvergent ist. Also ist auch die Reihe, die $f(x)$ definiert für fast alle x absolut konvergent und es gilt dort $f_{n_k} \to f(x)$ für $k \to \infty$. Es bleibt zu zeigen, dass auch $\|f_{n_k} - f\|_p \to 0$ gilt.
Dazu betrachten wir für alle x, für die $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ gilt:

$$|f_{n_k}(x) - f(x)|^p \leq (|f_{n_k}(x)| + |f(x)|)^p \leq 2^p |g(x)|^p$$

Die Funktion $|f_{n_k} - f|^p$ wird also durch $2^p g^p$ majorisiert. Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz gilt also

$$\lim_{K\to\infty} \int |f_{n_k}(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x = \int \lim_{K\to\infty} |f_{n_k}(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x = 0.$$

Die Teilfolge $(f_{n_K})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert also in $L^p(\mathbb{R}^n)$ gegen f. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist konvergiert sie ebenfalls gegen f.

Z9.2. Breit-Wigner-Verteilung

Berechnen und skizzieren Sie die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen, $a > 0$.

(a) $f(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$, (b) $F(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$.

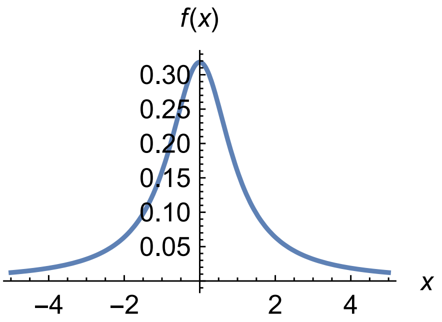
LÖSUNG:

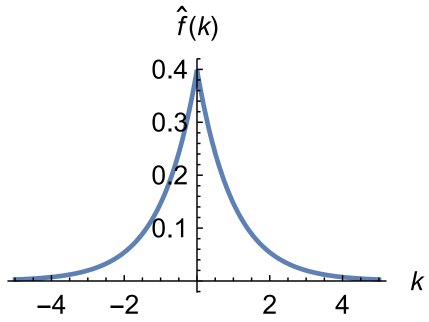
(a) $\int f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}a}(f(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}) = 2\pi\mathrm{i}\frac{a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\mathrm{i}a)}}{2\pi\mathrm{i}a} = \mathrm{e}^{ak} = \mathrm{e}^{-a|k|}, & \text{für } k \le 0, \\ -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{-\mathrm{i}a}(f(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}) = -2\pi\mathrm{i}\frac{a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(-\mathrm{i}a)}}{2\pi(-\mathrm{i}a)} = \mathrm{e}^{-ak} = \mathrm{e}^{-a|k|}, & \text{für } k > 0. \end{cases}$

also ist $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-a|k|}$.

(b) $\int \mathrm{e}^{-a|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-a(-x)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}k)x}}{a-\mathrm{i}k}\right]_{x=-\infty}^{0} + \left[\frac{\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}k)x}}{-(a+\mathrm{i}k)}\right]_{x=0}^{\infty}$
$= \frac{1}{a-\mathrm{i}k} - \frac{1}{-(a+\mathrm{i}k)} = \frac{(a+\mathrm{i}k)+(a-\mathrm{i}k)}{(a-\mathrm{i}k)(a+\mathrm{i}k)} = \frac{2a}{k^2+a^2}$. Also ist $\widehat{F}(k) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{a}{k^2+a^2}$.

Gezeigt wird nur $f(x)$ und $\widehat{f}(k)$, die sich nur um einen Faktor von $\widehat{F}$ und F unterscheiden.





Z9.3. Fouriertransformation bei linearer Abbildung

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine integrierbare Funktion. Zeigen Sie: Ist A eine invertierbare $n \times n$–Matrix, dann gilt für die Fouriertransformierte von $f_A(x) := f(Ax)$:

$$\widehat{f_A}(k) = \frac{1}{|\det A|}\widehat{f}\left((A^T)^{-1}k\right).$$

LÖSUNG:

Unter der Transformation $x' = Ax$, bzw., $x = A^{-1}x'$, steckt die Jacobi-Determinante in $\mathrm{d}^n x' = |\det A|\mathrm{d}^n x$. Für den Integrationsbereich gilt $A(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Somit ist

$$\begin{aligned} \widehat{f_A}(k) &= (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(Ax)\mathrm{d}^n x \\ &\overset{x'=Ax}{=} (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{A(\mathbb{R}^n)} |\det A^{-1}|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(A^{-1}x')} f(x')\mathrm{d}^n x' \\ &= |\det A|^{-1}(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}((A^{-1})^T k)\cdot x'} f(x')\mathrm{d}^n x' \\ &= \frac{1}{|\det A|}\widehat{f}\left((A^T)^{-1}k\right), \end{aligned}$$

wegen $\langle y, Ax\rangle = \langle A^T y, x\rangle$ und $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Präsenzaufgaben

P9.1. Hermite-Polynome

(a) Berechnen und skizzieren Sie $f^{(n)}(x)$ und ihre Fouriertransformierten für $n = 0, 1, 2$, mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(b) Bestimmen Sie linear unabhängige $h_n(x)$, $n = 0, 1, 2$, jeweils als Linearkombination von $f^{(k)}$, $k = 0, \ldots, n$, so dass $\widehat{h_n}(k) = \lambda_n h_n(k)$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, und skizzieren Sie diese.

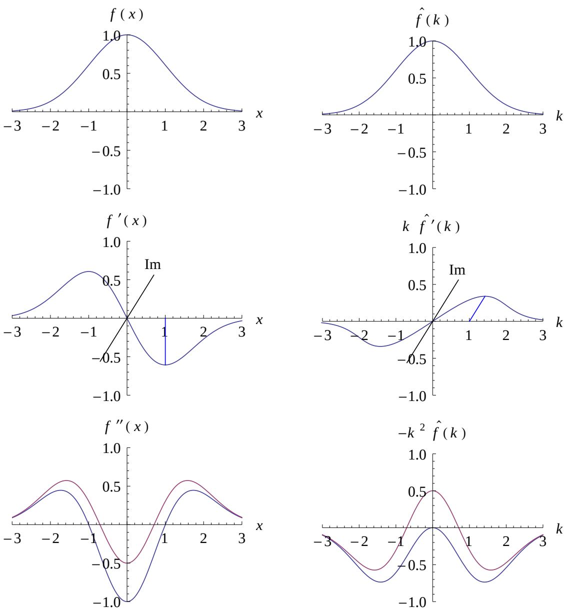
LÖSUNG:

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, $f'(x) = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, $f''(x) = (x^2 - 1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.
Wir wissen $\widehat{f}(k) = f(k) = \mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2}}$. Außerdem ist $\widehat{f^{(n)}}(k) = (\mathrm{i}k)^n \widehat{f}(k) = (\mathrm{i}k)^n \mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2}}$.

(b) Wir setzen $h_0 := f$, denn $\widehat{f}(x) = f(x)$, also $\widehat{h}_0 = \lambda_0 h_0$ mit $\lambda_0 = 1$.
Außerdem gilt für $h_1 := f'$, dass $\widehat{h_1}(k) = \widehat{f}'(k) = \mathrm{i}k\, e^{-\frac{k^2}{2}} = -if'(k) = \lambda_1 h_1(k)$ mit $\lambda_1 = -\mathrm{i}$.
Schließlich machen wir den Ansatz $h_2 := f'' + \alpha f$ mit zu bestimmendem α. Dann ist

$$\begin{aligned} \widehat{h_2}(k) &= \widehat{f''}(k) + \alpha \widehat{f}(k) = (-k^2 + \alpha)\widehat{f}(k) = (\alpha - k^2) f(k), \\ h_2(x) &= f''(x) + \alpha f(x) = (x^2 - 1 + \alpha) f(x) \end{aligned}$$

Die Bedingung $\widehat{h_2}(k) = \lambda_2 h_2(k)$ führt auf $(\alpha - k^2) f(k) = \lambda_2 (k^2 - 1 + \alpha) f(k)$, bzw., $k^2(\lambda_2 + 1) - \lambda_2(\alpha - 1) - \alpha = 0$ für alle k. Koeffizientenvergleich ergibt $\lambda_2 = -1$ und dann $2\alpha - 1 = 0$. Somit gilt für $h_2 = f'' + \frac{1}{2} f = (x^2 - \frac{1}{2}) f$, dass $\widehat{h_2}(k) = \lambda_2 h_2(k)$ mit $\lambda = -1$.



P9.2. Glattheit und Abfall der Fouriertransformation

Sei $f \in C^m(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}_0$, und $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R})$ für alle $j = 0, \ldots, m$. Zeigen Sie, dass

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{O}\big(\tfrac{1}{|k|^m}\big) \quad \text{für} \quad |k| \to \infty.$$

LÖSUNG:

Wegen $f^{(m)} \in L^1(\mathbb{R})$, ist $\widehat{f^{(m)}}$ stetig und beschränkt durch ein $C > 0$, d.h.

$$\widehat{f^{(m)}}(k) = \mathcal{O}(1) \quad \text{für } |k| \to \infty.$$

(Wegen Riemann-Lebesgue, $\lim_{|k|\to\infty} \widehat{f}(k) = 0$, gilt sogar $\widehat{f^{(m)}}(k) = o(1)$ für $|k| \to \infty$.). Nun gilt aber $\widehat{f^{(m)}}(k) = (\mathrm{i}k)^m \widehat{f}(k)$, somit ist $|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^m}$, d.h.,

$$\widehat{f}(k) = \mathcal{O}\big(\tfrac{1}{|k|^m}\big) \quad \text{für} \quad |k| \to \infty.$$

(Auch hier gilt sogar die stärkere Aussage $\widehat{f}(k) = o\big(\frac{1}{|k|^m}\big)$.

P9.3. Eine lineare partielle Differentialgleichung

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \partial_1 u = u + f.$$

Welche Eigenschaften der Fouriertransformation von u können Sie folgern.
Welche Voraussetzungen an u müssen dazu erfüllt sein?

LÖSUNG:

Wegen $f = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u + \partial_1 u - u$ und der Linearität der Fouriertransformation gilt für alle $k \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \widehat{\partial_1^2 u}(k) + \widehat{\partial_2^2 u}(k) + \widehat{\partial_1 u}(k) - \widehat{u}(k)\\ &= (-k_1^2 - k_2^2 + \mathrm{i}k_1 - 1)\widehat{u}(k),\end{aligned}$$

falls alle auftretenden partiellen Ableitungen von u integrierbar sind (damit die Fouriertransformationen existieren). Damit gilt aber

$$\widehat{u}(k) = -\frac{\widehat{f}(k)}{k_1^2 + k_2^2 - \mathrm{i}k_1 + 1}$$

Der Betrag des Nenners ist für $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ größer als 1. Somit ist $|\widehat{u}(k)| \leq |\widehat{f}(k)|$ also beschränkt, $\widehat{u}$ ist stetig und es gilt $\lim_{\|k\|\to\infty} \widehat{u}(k) = 0$.

Wie könnte man nun mit diesen Erkenntnissen u bestimmen?

(i) Indem man zu bekannter Fouriertransformation die ursprüngliche Funktion bestimmt (Fourierrücktransformation)

(ii) Indem man eine Entsprechung im Realraum des Produkts zweier Funktionen im Fourierraum findet (Faltung). Dazu muss man nur einmalig die Fourierrücktransformation der Funktion $k \mapsto -\frac{1}{\|k\|^2 - \mathrm{i}k_1 + 1}$ berechnen (Greensfunktion) und erhält dann Lösungen der Differentialgleichung für beliebiges f durch Faltung.

Hausaufgaben

H9.1. Beispiele für Fouriertransformationen

Berechnen und skizzieren Sie die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = \max\{0, a - |x|\}$, $a > 0$,

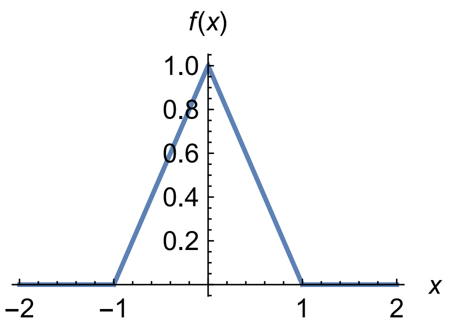
(b) $g(x) = \frac{1}{x^4+4}$.

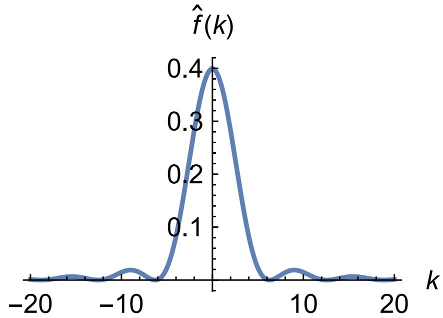
LÖSUNG:

(a) Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(k) &= \int_{-a}^{0} (a+x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} (a-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \\
&= \left[(a+x)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{-\mathrm{i}k}\right]_{-a}^{0} + \left[(a-x)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{-\mathrm{i}k}\right]_{0}^{a} \\
&\quad - \int_{-a}^{0} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{-\mathrm{i}k}\mathrm{d}x \qquad + \int_{0}^{a} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{-\mathrm{i}k}\mathrm{d}x \\
&= a\frac{1}{-\mathrm{i}k} - a\frac{1}{-\mathrm{i}k} - \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{(-\mathrm{i}k)^2}\right]_{-a}^{0} + \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{(-\mathrm{i}k)^2}\right]_{0}^{a} \\
&= \frac{-1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}ka} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka} - 1}{-k^2} = \frac{2}{k^2}(1 - \cos ka)
\end{aligned}$$

Für $a = 1$ sieht das so aus (links f, rechts $\widehat{f}$):



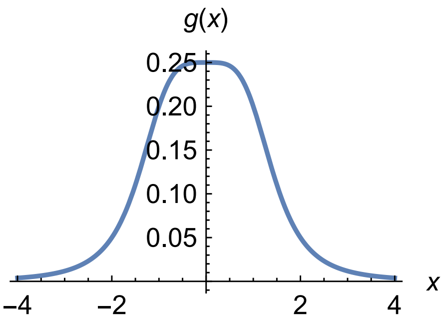


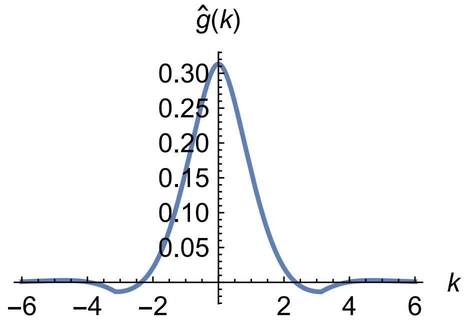
(b) Die Residuen von $\frac{1}{z^4+4}$ liegen bei $\pm 1 \pm \mathrm{i}$ jeweils mit Stärke $\frac{\pm 1 \pm i}{-16}$. Also für $k \leq 0$

$$\begin{aligned}
\int g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}_{1+\mathrm{i}}(h(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}) + 2\pi i\mathrm{Res}_{-1+\mathrm{i}}(h(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\frac{(1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(1+\mathrm{i})} + (-1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(-1+\mathrm{i})}}{-16} \\
&= \frac{\pi}{8i}((1+\mathrm{i})\mathrm{e}^{k}(\cos k - \mathrm{i}\sin k) - (1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{k}(\cos k + \mathrm{i}\sin k)) \\
&= \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{k}(\cos k - \sin k)
\end{aligned}$$

und für $k > 0$ analog $\int g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-k}(\cos k + \sin k)$. Insgesamt also

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-|k|}(\cos k + \sin |k|).$$





H9.2. Hermite-Funktionen bilden ein Orthonormalsystem

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $H_n(t) := (-1)^n \mathrm{e}^{t^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \mathrm{e}^{-t^2}$ ein Polynom vom Grad n. Die H_n heißen Hermite-Polynome. Zeigen Sie jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $H_n(t) = 2tH_{n-1}(t) - H'_{n-1}(t)$ und damit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t^2} H_{n-1}(t)\right) = -\mathrm{e}^{-t^2} H_n(t)$.

(b) $H'_n = 2nH_{n-1}(t)$. Hinweis: Man verwende die verallgemeinerte Leibniz-Formel $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(f(t)g(t)) = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(t)(t) g^{(n-j)}(t)$.

(c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_n(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 0$.

(d) Für $m \leq n$ ist $\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m(t)H_n(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 2^m m! \sqrt{\pi}\delta_{m,n}$. Hinweis: Setze $v'(t) = H_n(t)\mathrm{e}^{-t^2}$.

(e) Definiert man die Hermite-Funktionen $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(t) \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$, so gilt $\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_m(t)h_n(t)\mathrm{d}t = \delta_{m,n}$.

Lösung:

(a)
$$H_n(t) = (-1)^n \mathrm{e}^{t^2}\left(\tfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\mathrm{e}^{-t^2}\right) = (-1)^n \mathrm{e}^{t^2}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{t^2}\left(\tfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\mathrm{e}^{-t^2}\right)\right) = -\mathrm{e}^{t^2}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t^2}H_{n-1}(t)\right)$$
$$= -\mathrm{e}^{t^2}\left(-2t\mathrm{e}^{-t^2}H_{n-1}(t) + \mathrm{e}^{-t^2}H'_{n-1}(t)\right) = 2tH_{n-1}(t) - H'_{n-1}(t).$$

(b)

$$\begin{aligned}
(-1)^n H'_n(t) &= 2t\mathrm{e}^{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\mathrm{e}^{-t^2}\right) - \mathrm{e}^{t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(2t\mathrm{e}^{-t^2}) \\
&\overset{\text{Hinweis}}{=} 2t\mathrm{e}^{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\mathrm{e}^{-t^2}\right) - \mathrm{e}^{t^2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}2t\right)\left(\frac{\mathrm{d}^{n-j}}{\mathrm{d}t^{n-j}}\mathrm{e}^{-t^2}\right) \\
&\overset{j=0,1}{=} 2t\mathrm{e}^{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\mathrm{e}^{-t^2}\right) - 2t\mathrm{e}^{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\mathrm{e}^{-t^2}\right) - 2n\mathrm{e}^{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\mathrm{e}^{-t^2}\right) \\
&= -2n\mathrm{e}^{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\mathrm{e}^{-t^2}\right) = (-1)^n 2nH_{n-1}(t).
\end{aligned}$$

(c) $\int\limits_{\mathbb{R}} H_n(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = (-1)^n \int\limits_{\mathbb{R}}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\mathrm{e}^{-t^2}\right)\mathrm{d}t = (-1)^n\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_{-\infty}^{\infty} = -\left[\mathrm{e}^{-t^2}H_{n-1}(t)\right]_{-\infty}^{\infty} = 0$.

(d) Mit $v(t) = -\mathrm{e}^{-t^2} H_{n-1}(t)$ ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{H_m(t)}_{u(t)} \underbrace{H_n(t)\mathrm{e}^{-t^2}}_{v'(t)} \mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_m'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

$$= 0 + 2m \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(t)H_{n-1}(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \cdots = 2^m m! \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_0(t)H_{n-m}(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$$\overset{(b)}{=} 2^m m! \sqrt{\pi}\delta_{m,n},$$

da $H_0(t) = 1$ und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$ ist.

(e) Nach (d) gilt für $m \leq n$, dass

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_m(t)h_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2^m m!\sqrt{\pi}}\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} H_m(t)H_n(t)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^m m!\sqrt{\pi}}\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} 2^m m!\sqrt{\pi}\delta_{m,n} = \delta_{m,n}$$

und wegen Symmetrie für $m > n$, dass $\int\limits_{-\infty}^{\infty} h_m(t)h_n(t)\mathrm{d}t = 0$ ist.

H9.3. Fouriertransformationen des Halbkreises

Berechnen Sie die Fouriertransformationen von $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Skizzieren Sie f, g und ihre Fouriertransformationen.
Hinweis: Substitution $x = \sin t$, für g noch partielle Integration. Die Besselfunktionen sind gegeben durch $J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos(x \sin t - nt)\mathrm{d}t = J_{-n}(-x) = (-1)^n J_{-n}(x)$.

Lösung:

$f(x)$ ist wegen der beiden Wurzelsingularitäten bei ± 1 integrierbar.

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

Wir substituieren einmal $x = \sin t$ mit $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und dann mit $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ und erhalten

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sin t}}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \, \mathrm{d}t = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sin t}\mathrm{d}t,$$

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k) = \int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sin t}}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \, \mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sin t}\mathrm{d}t,$$

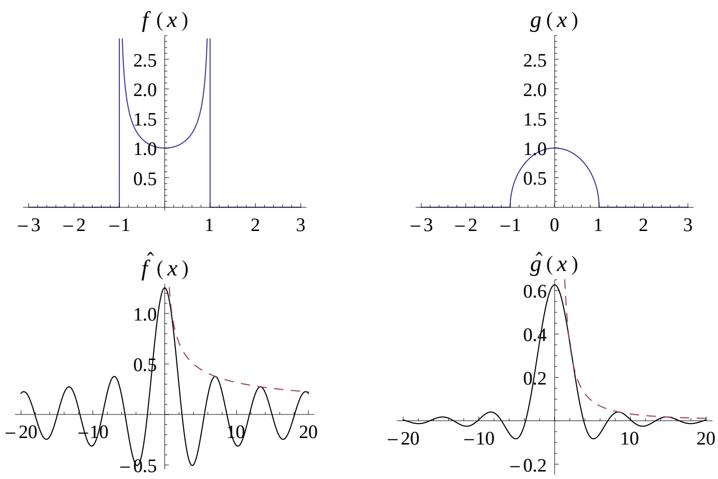
Also ist $\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sin t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sin t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{2\pi} \cos(k\sin t)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} J_0(k)$,

da f eine gerade reelle Funktion ist und deswegen der Imaginärteil von $\widehat{f}$ verschwindet. (Explizit: $\sin(k\sin t)$ ist eine ungerade, 2π-periodische Funktion. Das Integral über eine Periode ist also Null.)

g ist stetig mit kompaktem Träger, also integrierbar. Wie für $\widehat{f}$ können wir $\sin t$ mit $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und mit $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ substituieren und erhalten für $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\widehat{g}(k) &= \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sin t}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sin t}\cos t)\cos t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sin t}}{-\mathrm{i}k}\cos t\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sin t}}{-\mathrm{i}k}\sin t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4k}\int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sin t+\mathrm{i}t}dt - \frac{1}{4k}\int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\sin t-\mathrm{i}t}\mathrm{d}t \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{4k}\int\limits_{0}^{2\pi} \cos(k\sin t - t)\mathrm{d}t - \frac{1}{4k}\int\limits_{0}^{2\pi} \cos(k\sin t + t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2k}(J_1(k) - J_{-1}(k)).
\end{aligned}$$

g ist reell und symmetrisch. In $(*)$ wurde wieder benutzt, dass daher der Imaginärteil von $\widehat{g}$ verschwindet. Wegen $J_1(k) = -J_{-1}(k)$ gilt also $\widehat{g}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{J_1(k)}{k}$.



Die gestrichelten Linien sind die Graphen von $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (links) und $\frac{1}{x^{3/2}}$ (rechts). Sie beschreiben die Asymptotik der beiden Fouriertransformierten.