Zentralübung

Z8.1. Vertauschen von Summe und Integral

Sei (Ω, Σ, μ) ein beliebiger Maßraum. Zeigen Sie mit Hilfe der Konvergenzsätze aus der Vorlesung:

(a) Sind $g_n : \Omega \to [0, \infty]$ für $n \in \mathbb{N}$ messbar, dann gilt $\int\limits_\Omega \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n \mathrm{d}\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu$.

(b) Seien $g_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, messbar und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_\Omega |g_n| \mathrm{d}\mu < \infty$. Dann ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ fast überall absolut konvergent und $\int\limits_\Omega \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n \mathrm{d}\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu$.

Lösung:

(a) Wir setzen $f_n := \sum\limits_{k=1}^{n} g_k$. Dann sind die $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ messbar und monoton wachsend in n. Nach dem Satz über die monotone Konvergenz gilt somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_\Omega g_k \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \overset{\substack{\text{mon.}\\ \text{Kgz.}}}{=} \int\limits_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} g_n \mathrm{d}\mu.$$

(b) Da g_n integrierbar ist, ist auch $|g_n| = \sqrt{\mathrm{Re}(g_n)^2 + \mathrm{Im}(g_n)^2} \leq |\mathrm{Re}(g_n)| + |\mathrm{Im}(g_n)|$ integrierbar. Da $|g_n|$ nichtnegativ ist, können wir monotone Konvergenz verwenden: Unter Anwendung von (a) folgt somit, dass $\int\limits_\Omega \sum\limits_{n=1}^{\infty} |g_n| \mathrm{d}\mu < \infty$ ist. Somit ist auch $h := \sum\limits_{n=1}^{\infty} |g_n|$ integrierbar. h wird die Rolle der Majorante übernehmen.
Wegen der Integrierbarkeit von h muss die Menge aller $x \in \Omega$, für die $h(x) = \infty$ ist, eine Nullmenge sein (Für messbare Funktionen f ist auch der Wert ∞ zugelassen! Ist f nichtnegativ und die Menge $\{x \in \Omega \,|\, \forall s \in \mathbb{R} : f(x) > s\}$ keine Nullmenge so ist das Lebesgue-Integral sicher gleich ∞). Für diejenigen x mit $h(x) < \infty$ ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ absolut konvergent. Das bedeutet, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ absolut konvergent ist.
Weiter gilt für alle $x \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\Big|\underbrace{\sum_{k=1}^{n} g_k(x)}_{=:f_n(x)}\Big| \leq \sum_{k=1}^{n} |g_k(x)| \leq h(x).$$

Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz erhalten wir also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_\Omega g_k \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n \mathrm{d}\mu \overset{\substack{\text{maj.}\\ \text{Kgz.}}}{=} \int\limits_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} g_n \mathrm{d}\mu.$$

Z8.2. Vertauschen von Limes und Integral

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ integrierbar.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $g(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x)\mathrm{d}x$, stetig ist.

(b) Sei $g : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar bezüglich der ersten Variable. Für alle $\lambda \in [a,b]$ seien $x \mapsto g(\lambda, x)$ und $x \mapsto \partial_1 g(\lambda, x)$ integrierbar auf $\mathbb{R}^n$ und für alle x sei $|\partial_1 g(\lambda, x)| \leq h(x)$ mit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda, x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \lambda} g(\lambda, x)\mathrm{d}x.$$

LÖSUNG:

(a) Sei $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $k_j \to k \in \mathbb{R}^n$. Wir wollen $\lim\limits_{j\to\infty} g(k_j) = g(k)$ zeigen. Um majorisierte Konvergenz anwenden zu können, betrachten wir die Funktionenfolge $F_j(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_j\cdot x} f(x)$. Wegen der punktweisen Konvergenz $\lim\limits_{j\to\infty} F_j(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x)$ und der Majorante $|f|$ (f.a. j und x gilt: $|F_j(x)| = |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_j\cdot x}| \cdot |f(x)| \leq |f(x)|$) folgt wegen majorisierter Konvergenz

$$\lim_{j\to\infty} g(k_j) \;=\; \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F_j(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j\to\infty} F_j(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x)\mathrm{d}x = g(k).$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda, x)\mathrm{d}x &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda + t, x)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda, x)\mathrm{d}x \right) \\ &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(\lambda + t, x) - g(\lambda, x)}{t}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Sei nun (t_j) eine beliebige Nullfolge, so dass $\lambda + t_j \in [a,b] \setminus \{\lambda\}$. Wir wollen majorisierte Konvergenz auf $h_j(x) = \frac{g(\lambda+t_j,x)-g(\lambda,x)}{t_j}$ anwenden. Wegen der partiellen Differenzierbarkeit gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$: $\lim\limits_{j\to\infty} h_j(x) = \partial_1 g(\lambda, x)$. Um eine Majorante zu bekommen, benutzen wir den Mittelwertsatz der Differentialrechnung: zu jedem $j \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ existiert ein $\lambda(j,x) \in [\lambda, \lambda + t_j]$, bzw., $\in [\lambda + t_j, \lambda]$ für $t_j < 0$, so dass $h_j(x) = \frac{g(\lambda+t_j,x)-g(\lambda,x)}{t_j} = \partial_1 g(\lambda(j,x), x)$. Somit ist $|h_j(x)| < h(x)$ für alle j und alle x. Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz kann Integral und Grenzwert vertauscht werden,

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_j(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j\to\infty} h_j(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1 g(\lambda, x)\mathrm{d}x.$$

Da dies für jede Nullfolge (t_j) gilt, folgt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda, x)\mathrm{d}x &= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(\lambda + t, x) - g(\lambda, x)}{t}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_j(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1 g(\lambda, x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Präsenzaufgaben

P8.1. Lebesgue-Integral und Riemann-Integral für eine Stufenfunktion

Sei $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ messbar mit kompaktem Träger und $f(\mathbb{R}^n)=\{a_0,a_1,\cdots,a_k\}$ mit $0=a_0<a_1<\cdots<a_k$, $k\in\mathbb{N}$. Zeigen Sie anhand der Definition des Lebesgue-Integrals:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{d}\mu=\sum_{j=1}^{k}a_j\mu(f^{-1}(\{a_j\})).$$

Lösung:

Laut Definition des Lebesgue-Integrals ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{d}\mu=\int\limits_0^\infty F(y)\mathrm{d}y$$

mit $F(y)=\mu(\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,f(x)>y\})$. Da f nur endlich viele Werte annimmt ist F eine monoton fallende Stufenfunktion mit

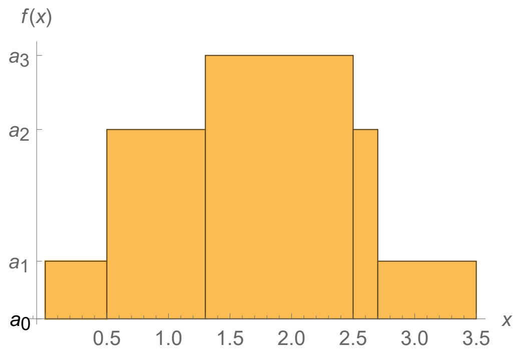
$$F(y)=\sum_{j=l}^{k}\mu(f^{-1}(\{a_j\}))\quad \text{für } y\in[a_{l-1},a_l[,\ l=1,\dots k.$$

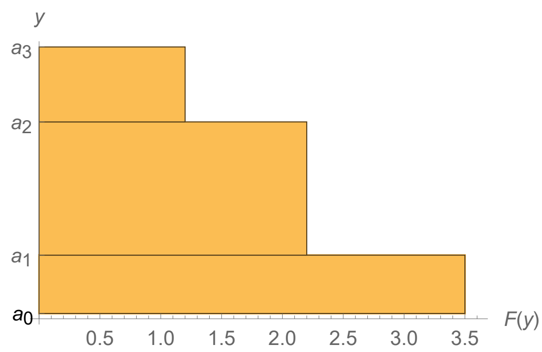
und $F(y)=0$ für $y\geq a_k$. Somit ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{d}\mu=\int\limits_0^\infty F(y)\mathrm{d}y=\sum_{l=1}^{k}(a_l-a_{l-1})\sum_{j=l}^{k}\mu(f^{-1}(\{a_j\}))$$
$$\overset{(*)}{=}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{j}(a_l-a_{l-1})\mu(f^{-1}(\{a_j\}))=\sum_{j=1}^{k}(a_j-a_0)\mu(f^{-1}(\{a_j\})).$$

$(*)$ $\sum\limits_{l=1}^{k}\sum\limits_{j=l}^{k}c_{jl}$ und $\sum\limits_{j=1}^{k}\sum\limits_{l=1}^{j}c_{jl}$ enthält offenbar die selben Summanden.

Veranschaulichung:





P8.2. Beispiele und Gegenbeispiele zur majorisierten Konvergenz

(a) Sei $f(z)=\frac{e^{ikz}}{z}$, $k>0$ und $\gamma_r(t)=r\,e^{it}$, $t\in[0,\pi]$. Zeigen Sie $\lim\limits_{r\to\infty}\int\limits_{\gamma_r}f(z)\mathrm{d}z=0$.

(b) Geben Sie eine monoton fallende Funktionenfolge $f_n:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ an, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, d.h., für die $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$ für alle $x\geq 0$ gilt, aber

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x\neq\int\limits_0^\infty \lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x.$$

(c) Geben Sie eine Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\int\limits_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x = 1$ an, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. Ist das ein Widerspruch zur majorisierten Konvergenz?

LÖSUNG:

(a) Es gilt

$$\int\limits_{\gamma_r} \frac{\mathrm{e}^{ikz}}{z}\mathrm{d}z = \int\limits_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{ikr(\cos t+\mathrm{i}\sin t)}}{re^{\mathrm{i}t}}\mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}dt = i\int\limits_0^\pi e^{-kr\sin t}e^{ikr\cos t}\mathrm{d}t.$$

Sei (r_n) eine beliebige positive Folge mit $r_n \to \infty$. Dann gilt für die Funktionenfolge $f_n(t) = e^{-kr_n \sin t}e^{ikr_n \cos t}$, dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0, \text{ für } t \in (0,\pi),$$

d.h. f_n konvergiert punktweise fast überall auf $[0,\pi]$ gegen die Nullfunktion. Außerdem ist

$$|f_n(t)| = e^{-kr_n \sin t} \le 1$$

für alle $t \in [0,\pi]$ und $n \in \mathbb{N}$. Die konstante Funktion $g(t) = 1$ ist also eine Majorante, die auf $[0,\pi]$ natürlich integrierbar ist. Somit gilt nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 0\cdot \mathrm{d}t = 0.$$

Da dies für jede Folge (r_n) mit $r_n \to \infty$ gilt, folgt die Behauptung

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\gamma_r}\frac{\mathrm{e}^{ikz}}{z}\mathrm{d}z = 0.$$

(b) Wähle $f_n(x) = \chi_{[n,\infty[}(x)$ für $x \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist f_n monoton fallend und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \ge 0$. Wegen $\int\limits_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x \ne \int\limits_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Wäre für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ das Integral $\int\limits_0^\infty f_n(x)dx < \infty$ so wäre wegen der Monotonie f_{n_0} eine integrierbare Majorante für alle f_n mit $n \ge n_0$. Da $f_n(x)$ für jedes feste x monoton fallend und nichtnegativ ist, existiert der punktweise Limes. Mit majorisierter Konvergenz erhielte man dann $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

(c) Z.B. $f_n(x) = \chi_{[0,1]}(x-n)$ oder $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x-n)$ oder $f_n(x) = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x-n)$. Diese Beispiele stehen nicht im Widerspruch zum Satz über die majorisierte Konvergenz. In allen drei Beispielen gibt es keine integrable Majorante.

P8.3. Satz von Fubini für das Lebesgue-Integral

Die Funktion $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathbb{Q} \\ 2x, & y \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ wurde als “Gegenbeispiel” zum Satz von Fubini für das Riemann-Integral angeführt. Diskutieren Sie Existenz und Wert des Integrals über $[0,1]^2$ und der iterierten Integrale im Riemannschen und im Lebesgueschen Sinne.

LÖSUNG:

Wie damals schon festgestellt (An3-Skript, Seite 6), gilt offenbar für alle $y \in [0,1]$:

$$\int_{[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x = 1$$

Somit ist $\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$ sowohl als Lebesgue-, als auch als Riemann-Integral.
Für festes $x \in [0,1]$ ist $y \mapsto f(x,y) = 2x + (1-2x)\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(y)$ genau wie die Dirichlet-Funktion $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ nicht Riemann-Integrierbar, d.h., $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ existiert nicht. Da $\mathbb{Q}$ eine (Lebesguesche) Nullmenge ist, ist $y \mapsto f(x,y)$ für jedes feste $x \in [0,1]$ fast überall gleich der konstanten Funktion $y \mapsto 2x$. Somit ist $\int_{[0,1]} \int_{[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} 2x\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 1$.

Da Ober- und Untersummen immer mindestens um den Wert $\frac{1}{2}$ differieren, ist f auf $[0,1]^2$ auch nicht Riemann-Integrierbar.
Da $\{(x,y) \in [0,1]^2 \,|\, y \in \mathbb{Q}\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$ ist, gilt auf $[0,1]^2$ auch, dass f fast überall gleich g ist, mit $g(x,y) = 2x$. Somit ist f Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int\limits_{[0,1]^2} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{[0,1]^2} g(x,y)\mathrm{d}(x,y) \overset{g \text{ stetig}}{=} 1$$

Im Lebesgueschen Sinne gilt der Satz von Fubini also vollumfänglich auch für f.

Hausaufgaben

H8.1. Spezialfall der Gleichheit von Lebesgue- und Riemann-Integral

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}_0^+$ stetig differenzierbar, $f' < 0$ und $f(1) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $F(t) := \mu(\{x \in [0,1] \,|\, f(x) > t\})$ für $t \in [0, f(0)]$ die Umkehrfunktion von $f : [0,1] \to [0, f(0)]$ ist.

(b) Beweisen Sie elementar, dass $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty F(t)\mathrm{d}t$.

LÖSUNG:

(a) Da f streng monoton fällt, mit $f(1) = 0$, existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, f(0)] \to [0,1]$ mit $f^{-1}(f(x)) = x$. Wegen $F(f(x)) = \mu(\{y \in [0,1] \,|\, f(y) > f(x)\}) = \mu([0,x[) = x$ für $x \in [0,1]$ gilt für alle $t \in [0, f(0)]$, dass $F(t) = f^{-1}(t)$.

(b) Wegen $F(t) = 0$ für $t \geq f(0)$ gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty F(t)\mathrm{d}t &= \int\limits_0^{f(0)} F(t)\mathrm{d}t \overset{t=f(x)}{=} \int\limits_{f^{-1}(0)}^0 F(f(x))f'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_1^0 xf'(x)\mathrm{d}x = [xf(x)]_1^0 - \int\limits_1^0 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

H8.2. Majorisierte Konvergenz für Reihen

Wir betrachten $\mathbb{N}_0$ mit dem Zählmaß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \to [0,\infty]$, $\mu(A) = |A|$ für $A \subseteq \mathbb{N}_0$.

(a) Was besagt der Satz von der majorisierten Konvergenz bezüglich des Zählmaßes für Folgen in $\mathbb{C}$?

(b) Beweisen Sie den Satz von der majorisierten Konvergenz für Reihen elementar.

(c) Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n = e^z$ für $z \in \mathbb{C}$. HINWEIS: Benutzen Sie, dass bei festem k die Folge $\binom{n}{k}\frac{|z|^k}{n^k}$ für $n \to \infty$ monoton gegen $\frac{|z|^k}{k!}$ konvergiert.

LÖSUNG:

(a) Jede Folge ist messbar, da als σ-Algebra die Potenzmenge gewählt ist.
Für eine beliebige Folge $f : \mathbb{N}_0 \to [0,\infty)$ ist

Satz von der majorisierten Konvergenz: Seien (a_k) und $(a_k^{(n)})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ Folgen in $\mathbb{C}$. Gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, dass $a_k^{(n)} \to a_k$ für $n \to \infty$ (punktweise Konvergenz) und gibt es eine Folge (b_k) mit $|a_k^{(n)}| \leq b_k$ für alle n und $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} b_k < \infty$, so ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)}$$

(b) Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $\sum\limits_{k=K+1}^{\infty} b_k < \frac{\epsilon}{3}$. Da $\sum\limits_{k=0}^{K} a_k^{(n)} \to \sum\limits_{k=0}^{K} a_k$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $\left|\sum\limits_{k=0}^{K} (a_k - a_k^{(n)})\right| < \frac{\epsilon}{3}$. Somit ist

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(n)}\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{K}(a_k - a_k^{(n)})\right| + \sum_{k=K+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=K+1}^{\infty} |a_k^{(n)}| < \frac{\epsilon}{3} + 2\sum_{k=K+1}^{\infty} b_k < \epsilon.$$

(c) Für festes $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $a_k^{(n)} := \binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k} = \frac{z^k}{k!}\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{n\cdot n\cdots n} \to \frac{z^k}{k!} =: a_k$ für $n \to \infty$, da $\binom{n}{k} = 0$ für $n < k$. Die Majorante ist $b_k = \frac{|z|^k}{k!}$, da $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \nearrow \frac{1}{k!}$ und damit $|a_k^{(n)}| \nearrow |a_k| = b_k$ und $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} b_k = e^{|z|} < \infty$. Daher gilt wegen majorisierter Konvergenz

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

H8.3. Ableitung der Gammafunktion

Für $x > 0$ ist die Gammafunktion definiert als $\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

(a) Begründen sie, warum der Integrand auf $\mathbb{R}^+$ integrierbar ist.

(b) Zeigen Sie für alle $x > 0$: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(c) Zeigen Sie, dass Γ differenzierbar ist. Wie lautet der Integralausdruck für die Ableitung?

LÖSUNG:

(a) Für $x > 0$ ist der Integrand $f(t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ auf $(0,1]$ integrierbar, da $|f(t)| \leq t^{x-1}$ und der Exponent ist größer als -1. Auf $[1,\infty)$ gibt es offenbar ein $T > 1$, so dass $|f(t)| \leq \mathrm{e}^{-t/2}$ für alle $t > T$, also auch integrierbar.

(b) Sei $x > 0$. Dann ist mit partieller Integration

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \big[-t^x\mathrm{e}^{-t}\big]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} xt^{x-1}(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t = x\int_0^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

(c) Mit $g(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ ist

$$\partial_1 g(x,t) = \partial_x(t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}) = \partial_x(\mathrm{e}^{(x-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}) = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}\ln t = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ln t.$$

Der Logarithmus ändert nichts an der Integrierbarkeit auf $[1,\infty)$. Auf $(0,1]$ erhalten wir

$$\int_0^1 |\partial_1 g(x,t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 (-\ln t)t^{x-1}\mathrm{d}t = \big[(-\ln t)\frac{t^x}{x}\big]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{t}\frac{t^x}{x}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t < \infty,$$

da $x > 0$. Damit wir die Ableitung mit dem Integral vertauschen dürfen (Aufgabe Z10.2(b)), brauchen wir eine Majorante von $t \mapsto \partial_1 g(x,t)$ unabhängig von x:
Für die Ableitung von Γ an der Stelle $x_0 > 0$ betrachten wir die eingeschränkte Funktion $\partial_1 g : [x_0-\epsilon, x_0+\epsilon] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ für $\epsilon > 0$ klein genug. Für die zweite partielle Ableitung gilt $\partial_1^2 g(x,t) = t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^2 \geq 0$, somit ist $x \mapsto \partial_1 g(x,t)$ für jedes t monoton steigend. Da $\partial_1 g(x,t) \geq 0$ für $t \geq 1$ und < 0 für $t < 1$ ist, motiviert dies die Definition

$$h(t) := \begin{cases} \partial_1 g(x_0-\epsilon, t) & \text{für } t < 1, \\ -\partial_1 g(x_0+\epsilon, t) & \text{für } t \geq 1. \end{cases}$$

h ist als Majorante von $\partial_1 g$ auf $[x_0-\epsilon, x_0+\epsilon] \times \mathbb{R}^+$ gewählt, denn es gilt für alle $t \in \mathbb{R}^+$ und alle $x \in [x_0-\epsilon, x_0+\epsilon]$, dass $|\partial_1 g(x,t)| \leq h(t)$. Somit gilt

$$\Gamma'(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_0^\infty g(x,t)\mathrm{d}t\Big|_{x=x_0} = \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\mathrm{d}t\Big|_{x=x_0} = \int\limits_0^\infty t^{x_0-1}\mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t.$$