TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. S. Kaniber
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)
www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2020W

Wintersem. 2020/21
Blatt 8
(8.1.2021)

Zentralübung

Z8.1. Vertauschen von Summe und Integral

Sei (Ω, Σ, μ) ein beliebiger Maßraum. Zeigen Sie mit Hilfe der Konvergenzsätze aus der Vorlesung:

(a) Sind $g_n : \Omega \to [0, \infty]$ für $n \in \mathbb{N}$ messbar, dann gilt $\int\limits_\Omega \sum\limits_{n=1}^\infty g_n \mathrm{d}\mu = \sum\limits_{n=1}^\infty \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu$.

(b) Seien $g_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, messbar und $\sum\limits_{n=1}^\infty \int\limits_\Omega |g_n| \mathrm{d}\mu < \infty$. Dann ist $\sum\limits_{n=1}^\infty g_n$ fast überall absolut konvergent und $\int\limits_\Omega \sum\limits_{n=1}^\infty g_n \mathrm{d}\mu = \sum\limits_{n=1}^\infty \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu$.

Z8.2. Vertauschen von Limes und Integral

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ integrierbar.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $g(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x)\mathrm{d}x$, stetig ist.

(b) Sei $g : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar bezüglich der ersten Variable. Für alle $\lambda \in [a, b]$ seien $x \mapsto g(\lambda, x)$ und $x \mapsto \partial_1 g(\lambda, x)$ integrierbar auf $\mathbb{R}^n$ und für alle x sei $|\partial_1 g(\lambda, x)| \leq h(x)$ mit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} g(\lambda, x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial\lambda} g(\lambda, x)\mathrm{d}x.$$

Präsenzaufgaben

P8.1. Lebesgue-Integral und Riemann-Integral für eine Stufenfunktion

Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ messbar mit kompaktem Träger und $f(\mathbb{R}^n) = \{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$ mit $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_k$, $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie anhand der Definition des Lebesgue-Integrals:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^k a_j \mu(f^{-1}(\{a_j\})).$$

P8.2. Beispiele und Gegenbeispiele zur majorisierten Konvergenz

(a) Sei $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{ikz}}{z}$, $k > 0$ und $\gamma_r(t) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \pi]$. Zeigen Sie $\lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

(b) Geben Sie eine monoton fallende Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ an, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, d.h., für die $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \geq 0$ gilt, aber

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int\limits_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

(c) Geben Sie eine Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\int\limits_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x = 1$ an, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. Ist das ein Widerspruch zur majorisierten Konvergenz?

P8.3. Satz von Fubini für das Lebesgue-Integral

Die Funktion $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathbb{Q} \\ 2x, & y \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ wurde als "Gegenbeispiel" zum Satz von Fubini für das Riemann-Integral angeführt. Diskutieren Sie Existenz und Wert des Integrals über $[0,1]^2$ und der iterierten Integrale im Riemannschen und im Lebesgueschen Sinne.

Hausaufgaben

H8.1. Spezialfall der Gleichheit von Lebesgue- und Riemann-Integral

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}_0^+$ stetig differenzierbar, $f' < 0$ und $f(1) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $F(t) := \mu(\{x \in [0,1] \mid f(x) > t\})$ für $t \in [0, f(0)]$ die Umkehrfunktion von $f : [0,1] \to [0, f(0)]$ ist.

(b) Beweisen Sie elementar, dass $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty F(t)\mathrm{d}t$.

H8.2. Majorisierte Konvergenz für Reihen

Wir betrachten $\mathbb{N}_0$ mit dem Zählmaß $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}_0) \to [0,\infty]$, $\mu(A) = |A|$ für $A \subseteq \mathbb{N}_0$.

(a) Was besagt der Satz von der majorisierten Konvergenz bezüglich des Zählmaßes für Folgen in $\mathbb{C}$?

(b) Beweisen Sie den Satz von der majorisierten Konvergenz für Reihen elementar.

(c) Zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n = e^z$ für $z \in \mathbb{C}$. Hinweis: Benutzen Sie, dass bei festem k die Folge $\binom{n}{k}\frac{|z|^k}{n^k}$ für $n \to \infty$ monoton gegen $\frac{|z|^k}{k!}$ konvergiert.

H8.3. Ableitung der Gammafunktion

Für $x > 0$ ist die Gammafunktion definiert als $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

(a) Begründen sie, warum der Integrand auf $\mathbb{R}^+$ integrierbar ist.

(b) Zeigen Sie für alle $x > 0$: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(c) Zeigen Sie, dass Γ differenzierbar ist. Wie lautet der Integralausdruck für die Ableitung?

Hausaufgabenabgabe: Freitag, 22.1.2021, bis 12:00 in Moodle, maximal zu zweit