Prof. Dr. M. Wolf
Dr. S. Kaniber
Dr. M. Prähofer

**Mathematik für Physiker 4**
**(Analysis 3)**
www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2020W

Wintersem. 2020/21
Lösungsblatt 7
(17.12.2020)

## Zentralübung

### Z7.1. Wurzelsingularität

Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z)^2 = z$?

Lösung:

Wenn es eine solche Funktion gäbe, dann hätten wir eine weitere Form einer isolierten Singularität gefunden.
Annahme: Es gibt so eine Funktion $f$. Dann ist der Ursprung eine isolierte Singularität von $f$. Wegen $|f(z)| \le 1$ für $|z| \le 1$ ist $f$ beschränkt in einer Umgebung des Ursprungs. Offenbar ist $f$ sogar stetig fortsetzbar durch $f(0) = 0$, da $\lim\limits_{z\to 0} |f(z)| = \lim\limits_{z\to 0} \sqrt{|z|} = 0$ ist. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz müsste diese stetige Fortsetzung sogar eine analytische Fortsetzung sein. Auf jeden Fall hat $f$ eine Nullstelle (der Vielfachheit $k$, $k > 0$ im Ursprung. Somit hätte $z = f(z)^2$ eine $2k$-fache Nullstelle im Ursprung. In Wahrheit ist diese jedoch nur eine einfache Nullstelle. Widerspruch.

### Z7.2. Isolierte Singularitäten

(a) Zeigen Sie: Sind $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und ist $z_0 \in U$ eine $k$-fache Nullstelle von $f$ und eine $l$-fache Nullstelle von $g$, dann besitzt $\frac{f}{g}$ eine isolierte Singularität bei $z_0$, die
- für $k \ge l$ eine hebbare Singularität, nämlich sogar eine $(k-l)$-fache Nullstelle von $\frac{f}{g}$ ist. (wobei 0-fache Nullstelle für *keine* Nullstelle steht).
- für $k < l$ ein Pol $(l-k)$-ter Ordnung ist.

Klassifizieren Sie nun die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen:

(b) $f(z) = \frac{z-1}{(z^4-1)^2}$, (c) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$, (d) $f(z) = z^2 \mathrm{e}^{-z^{-4}}$, (e) $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$.

Lösung:

(a) Da $f$ bei $z_0$ eine $k$-fache Nullstelle hat, gibt es eine auf $U$ holomorphe Funktion $\tilde{f} : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = (z - z_0)^k \tilde{f}(z)$ und $\tilde{f}(z_0) \ne 0$ (Für $z \ne z_0$ definiert man $\tilde{f}(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}$. Wegen der Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-z_0)^n$$

mit $a_k \ne 0$ hat $\tilde{f}$ eine hebbare Singularität bei $z_0$ mit $\tilde{f}(z_0) = a_k$).
Genauso gibt es ein holomorphes $\tilde{g} : U \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = (z - z_0)^l \tilde{g}(z)$ und $\tilde{g}(z_0) \ne 0$.
Somit ist für $k < l$

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^{l-k}} \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$$

offensichtlich ein Pol $(l-k)$-ter Ordnung, da $\frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}$ in einer Umgebung von $z_0$ holomorph ist.
Für $k > l$ gilt

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z-z_0)^{k-l}\frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}.$$

Die rechte Seite ist holomorph in einer Umgebung von $z_0$ und besitzt offensichtlich eine $(k-l)$-fache Nullstelle bei $z_0$.
Insbesondere zeigt dies, dass bei Quotientenbildung zweier holomorpher Funktionen an Nullstellen des Nenners keine wesentliche Singularität erzeugt werden kann.

(b) Für den Nenner gilt $(z^4-1)^2 = (z-1)^2(z-\mathrm{i})^2(z+1)^2(z+\mathrm{i})^2$. $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-\mathrm{i})^2(z+1)^2(z+\mathrm{i})^2}$ besitzt isolierte Singularitäten bei $z = \pm 1, \pm\mathrm{i}$.
Bei $z = 1$ liegt im Nenner eine einfache Nullstelle vor. Dort ist also ein Pol erster Ordnung. Die anderen Nullstellen im Nenner sind doppelte. Daher sind $-1$, $\pm\mathrm{i}$ jeweils Pole zweiter Ordnung.

(c) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ hat isolierte Singularitäten bei den Nullstellen des Nenners, $z_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Alle Nullstellen sind einfach, da $\sin'(z_k) = \cos(z_k) = \cos(\pi k) = (-1)^k \neq 0$ ist. Der Zähler hat außer der einfachen bei $z = 0$ keine weiteren Nullstellen. Nach (a) besitzt $f$ also eine hebbare Singularität bei $z = 0$ und Pole erster Ordnung bei $z_k$, $k \neq 0$.

(d) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $f$ holomorph. Die einzige isolierte Singularität ist also bei $z = 0$. Hier gilt die Laurentreihenentwicklung

$$z^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{z^4}} = z^2\Big(1 + (-\tfrac{1}{z^4}) + \frac{(-\frac{1}{z^4})^2}{2!} + \cdots\Big) = z^2 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^6} - \frac{1}{3!z^{10}} \pm \cdots,$$

deren Hauptteil offensichtlich unendlich viele Summanden enthält. Somit hat $f$ bei 0 eine wesentliche Singularität.

(e) Die isolierten Singularitäten liegen bei $z_n = \frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dies sind alles einfache Pole, da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin(\frac{1}{z})|_{z=z_n} = -(\pi n)^2\cos(\pi n) \neq 0$ ist. 0 ist keine isolierte Singularität von $f$, da sich die isolierten Singularitäten von $f$ bei 0 häufen.

## Z7.3. Residuen von Einheitswurzeln

(a) Für $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, zeige man $\mathrm{Res}_{z_0}\big(\frac{f(z)}{z^n-c}\big) = \frac{z_0 f(z_0)}{nc}$, falls $f(z)$ bei $z_0$ holomorph und $z_0$ eine Nullstelle des Nenners ist.

(b) Geben Sie alle Residuen von $\frac{1}{1+z^{2n}}$ an.

(c) Bestimmen Sie $\oint\limits_{\partial G} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^{2n}}$, wobei $G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < R, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und $R > 1$?

(d) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}$.

Lösung:

(a) $\frac{1}{z^n-c} = \frac{1}{h(z)}$ mit $h(z) = z^n - c$. $h$ hat $n$ einfache Nullstellen an den Ecken eines regelmäßigen $n$-Ecks um den Ursprung. Ist $z_0$ eine davon, so ist

$$\mathrm{Res}_{z_0}(\tfrac{f}{h}) = \frac{f(z_0)}{h'(z_0)} = \frac{f(z_0)}{nz_0^{n-1}} = \frac{z_0 f(z_0)}{nz_0^n} = \frac{z_0 f(z_0)}{n(h(z_0)+c)} = \frac{z_0 f(z_0)}{nc}.$$

(b) Die Nullstellen von $z^{2n}+1$ sind $z_j = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2n}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi j}{n}}$, $j = 0, \ldots, 2n-1$.
Somit ist $\mathrm{Res}_{z_j}(\frac{1}{z^{2n}-(-1)}) = \frac{z_j}{-2n}$.

(c) $G$ ist ein Halbkreis in der oberen Halbebene mit dem Ursprung als Mittelpunkt und Radius $R > 1$. Somit umschließt das Konturintegral genau die Nullstellen $z_j$, $j = 0, \ldots, n-1$. Nach dem Residuensatz gilt

$$\begin{aligned}\oint_{\partial G} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^{2n}} &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=0}^{n-1} \mathrm{Res}_{z_j}\left(\tfrac{1}{1+z^{2n}}\right) = -\frac{\pi\mathrm{i}}{n}\sum_{j=0}^{n-1} z_j = -\frac{\pi\mathrm{i}}{n} e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}})^j \\ &= -\frac{\pi\mathrm{i}}{n}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2n}} \frac{1-(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}})^n}{1-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}}} = -\frac{\pi}{n}\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2n}} - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2n}}} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}} = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}} = \lim_{R\to\infty}\int_{\partial G} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^{2n}} - \int_{\gamma_H} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^{2n}} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}},$$

da das Integral entlang des Hilfswegs $\gamma_H(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0,\pi]$ im Limes $R \to \infty$ verschwindet:

$$\left|\int_{\gamma_H} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^{2n}}\right| \le \int_{\gamma_H} \frac{\mathrm{d}z}{|1+z^{2n}|} \overset{R>1}{\le} \pi R \frac{1}{R^{2n}-1} \to 0 \text{ für } R \to \infty.$$

## Präsenzaufgaben

### P7.1. Laurentreihenentwicklung

(a) Geben Sie alle Laurentreihenentwicklungen von $\frac{1}{z-z_0}$ um 0 an, wobei $z_0 \in \mathbb{C}$.

(b) Geben Sie alle Laurententwicklungen von $\frac{1}{(z-2)(z-1)}$ im Ursprung an.

LÖSUNG:

(a) Für $z_0 = 0$ ist $f(z) = \frac{1}{z}$ schon die Laurentreihenentwicklung. Für $z_0 \neq 0$ gilt

$$\frac{1}{z-z_0} = \begin{cases} -\frac{1}{z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{z_0}} = -\frac{1}{z_0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = -\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z_0^2}z - \frac{1}{z_0^3}z^2 - \cdots & \text{für } z \in K_{0,|z_0|}(0), \\ \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{z_0}{z}} = \frac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z_0}{z}\right)^n = \frac{1}{z} + z_0\frac{1}{z^2} + z_0^2\frac{1}{z^3} + z_0^3\frac{1}{z^4} + \cdots & \text{für } z \in K_{|z_0|,\infty}(0). \end{cases}$$

Andere Laurentreihenentwicklungen gibt es nicht, denn: ist $\frac{1}{z-z_0}$ auf $K_{r,R}(0)$ holomorph, $r < R$, dann ist entweder $(r,R) \subseteq (0,|z_0|)$ oder $(r,R) \subseteq (|z_0|,\infty)$.

(b) $\frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$. Nach (a) gilt

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{z-2} &= -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}z - \tfrac{1}{8}z^2 - \cdots && \text{für } |z| < 2, \\ &= \tfrac{1}{z} + \tfrac{2}{z^2} + \tfrac{4}{z^3} + \cdots && \text{für } |z| > 2, \\ \tfrac{1}{z-1} &= -1 - z - z^2 - \cdots && \text{für } |z| < 1, \\ &= \tfrac{1}{z} + \tfrac{1}{z^2} + \tfrac{1}{z^3} + \cdots && \text{für } |z| > 1.\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\frac{1}{(z-2)(z-1)} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \cdots & \text{für } |z| < 1, \\ \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \cdots & \text{für } 1 < |z| < 2, \\ \cdots + \frac{7}{z^4} + \frac{3}{z^3} + \frac{1}{z^2} + 0 & \text{für } |z| > 2. \end{cases}$$

### P7.2. Anwendung des Residuensatzes

Berechnen Sie $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{b+\sin t}$ für $b > 1$. HINWEIS: Man schreibe das Integral als komplexes Kurvenintegral mit holomorphem Integranden entlang der Kurve $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0,2\pi]$.

LÖSUNG:

Der Ansatz $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{b+\sin t} = \int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t$ führt auf $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{b+\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})}$. Wir wählen $f(z) = \frac{-\mathrm{i}z^{-1}}{b+\frac{1}{2\mathrm{i}}z-\frac{1}{2\mathrm{i}}z^{-1}} = \frac{1}{\mathrm{i}zb+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{z^2+\mathrm{i}2bz-1}$.
$z^2+2\mathrm{i}bz-1$ hat die Nullstellen $z_{1,2} = -\mathrm{i}b \pm \sqrt{-b^2+1} = -\mathrm{i}(b \mp \sqrt{b^2-1})$.
Da $|z_2| = b+\sqrt{b^2-1} > 1$ und $|z_1| = b|1-\sqrt{1-\frac{1}{b^2}}| < 1$ ist, wird nur der Pol $z_1$ von $\gamma$ eingeschlossen und es gilt mit dem Residuensatz

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{b+\sin t} &= \int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}_{z_1}(f) = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}_{z_1}\left(\frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)}\right) = 2\pi\mathrm{i}\frac{2}{z_1-z_2} \\ &= \frac{4\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{i}\sqrt{b^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2-1}}.\end{aligned}$$

**P7.3. Residuenkalkül**

Berechnen Sie (a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$, (b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$, (c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x$.

LÖSUNG:

(a) Der Integrand ist stetig und fällt schnell genug ab um absolut integrierbar zu sein. Da er darüber hinaus auch noch ungerade ist, ist das Ergebnis 0.

(b) Die Funktion $z \mapsto (1+z^2)^2$ hat die beiden doppelten Nullstellen $z_1 = \mathrm{i}$ und $z_2 = -\mathrm{i}$. Für das Residuum bei $z_1 = \mathrm{i}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z_1}\left(\frac{z^2}{(1+z^2)^2}\right) &= \lim_{z\to z_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-z_1)^2 \frac{z^2}{(z-z_1)^2(z+z_1)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z^2}{(z+\mathrm{i})^2}\Bigg|_{z=\mathrm{i}} \\ &= \frac{2z(z+\mathrm{i})^2-2z^2(z+\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})^4}\Bigg|_{z=\mathrm{i}} = \frac{-8\mathrm{i}+4\mathrm{i}}{16} = \frac{1}{4\mathrm{i}}.\end{aligned}$$

Somit gilt, da $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ auf einer offenen Umgebung von $\{\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ holomorph ist und $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$ ist, dass

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{z_1}(f) = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{1}{4\mathrm{i}} = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Die Funktion $z \mapsto (1+z^2)^3$ hat die beiden dreifachen Nullstellen $z_1 = \mathrm{i}$ und $z_2 = -\mathrm{i}$. Für das Residuum bei $z_1 = \mathrm{i}$ erhalten wir

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(1+z^2)^3}\right) = \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{(z+\mathrm{i})^3}\Bigg|_{z=\mathrm{i}} = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{3}{(z+\mathrm{i})^4}\Bigg|_{z=\mathrm{i}} = \frac{3\cdot 4}{2(z+\mathrm{i})^5}\Bigg|_{z=\mathrm{i}} = \frac{3}{16\mathrm{i}}.$$

Somit gilt, da $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}$ auf einer offenen Umgebung von $\{\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ holomorph ist, und $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$ ist, dass

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3} = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}}(f) = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{3}{16\mathrm{i}} = \frac{3\pi}{8}.$$

## Hausaufgaben

**H7.1. Laurentreihenentwicklungen**

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklungen einschließlich Konvergenzbereich auf punktierten Kreisscheiben um die isolierten Singularitäten von

(a) $f(z) = \frac{e^z}{(z+2)^3}$, (b) $f(z) = \frac{\sin z - z}{z^3}$, (c) $f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z}$, (d) $f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$.

Hinweis: In (d) genügen die ersten 3 von Null verschiedenen Terme der Laurentreihe.

Lösung:

(a) $f(z) = \frac{e^z}{(z+2)^3} = e^{-2}\frac{e^{z+2}}{(z+2)^3} = e^{-2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(z+2)^{k-3}$
$= \frac{1}{e^2(z+2)^3} + \frac{1}{e^2(z+2)^2} + \frac{1}{2e^2(z+2)} + \frac{1}{3!e^2} + \frac{1}{4!e^2}(z+2) + \cdots$.
Konvergenzbereich $K_{0,\infty}(-2)$.

(b) $f(z) = \frac{\sin z - z}{z^3} = \frac{1}{z^3}(-\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \cdots) = -\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} \pm \cdots$, Konvergenzbereich $\mathbb{C}$.

(c) $z^3 \sin\frac{1}{z} = z^3 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!z^{2k+1}} = z^2 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!z^2} - \frac{1}{7!z^4} \pm \cdots$. Konvergenzbereich $K_{0,\infty}(0)$.

(d) $f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$ hat isolierte Singularitäten für $z \in \pi\mathbb{Z}$. Wegen der $\pi$-Periodizität gilt für $k \in \mathbb{Z}$, dass $f(\pi k + w) = f(w)$. Es genügt also die Laurententwicklung um den Ursprung zu bestimmen.
Offenbar hat $zf(z) = \frac{z\cos z}{\sin z}$ eine hebbare Singularität bei $z = 0$ (wegen $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$).
Somit ist für die ersten Koeffizienten

$$\begin{aligned}
\frac{\cos z}{\sin z} &= \frac{1}{z}\cdot\frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} \mp \cdots}{1 - (\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} \pm \cdots)} \\
&= \tfrac{1}{z}(1 - \tfrac{z^2}{2} + \tfrac{z^4}{4!} \mp \cdots)(1 + (\tfrac{z^2}{3!} - \tfrac{z^4}{5!} \pm \cdots) + (\tfrac{z^2}{3!} - \tfrac{z^4}{5!} \pm \cdots)^2 + \cdots) \\
&= \tfrac{1}{z}(1 - \tfrac{z^2}{2} + \tfrac{z^4}{4!} \mp \cdots)(1 + \tfrac{z^2}{6} \underbrace{- \tfrac{z^4}{120} + \tfrac{z^4}{36}}_{= + \frac{7}{360}z^4} + \mathcal{O}(z^6)) \\
&= \tfrac{1}{z} + z(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2}) + z^3(\tfrac{1}{24} + \tfrac{7}{360} - \tfrac{1}{12}) + \mathcal{O}(z^5) = \tfrac{1}{z} - \tfrac{1}{3}z - \tfrac{1}{45}z^3 + \mathcal{O}(z^5).
\end{aligned}$$

*Anmerkung:* Die vollständige Cotangensreihe lautet

$$\cot z = \sum_{0}^{\infty} \frac{4^n B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$$

mit den Bernoullizahlen, $B_1 = -\frac{1}{2}$ und für $n > 1$

$$B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k.$$

## H7.2. Spezialfall der Partialbruchzerlegung

Sei $f(z) = \frac{p(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)}$ mit paarweise verschiedenen $z_1, \ldots, z_n$, $n \in \mathbb{N}$, und einem Polynom $p$ vom Grad kleiner $n$ und keiner Nullstelle bei $z_j$, $j = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie:

$$\frac{p(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{Res}_{z_j}(f)}{z - z_j}.$$

Wie kann man $\mathrm{Res}_{z_j}(f)$ bestimmen? Hinweis: Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der Differenz der beiden Seiten.

Lösung:

Nach Voraussetzung ist für $j = 1, \ldots, n$ der Punkt $z_j$ jeweils ein Pol erster Ordnung von $f$. Die Laurententwicklung hat also dort die Form $\frac{\mathrm{Res}_{z_j}(f)}{z-z_j}$ +Nebenteil. Betrachten wir nun $g(z) = f(z) - \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{Res}_{z_j}(f)}{z-z_j}$, so verschwindet für $g$ nach Konstruktion in allen $z_j$ der Hauptteil viollständig, Dort sind also überall hebbare Singularitäten. $g$ kann somit zu einer ganzen Funktion fortgesetzt werden. Wegen der Grad-Bedingung an $p$ gilt $\lim\limits_{|z|\to\infty} |g(z)| = 0$. Da $g$ auf $\mathbb{C}$ stetig ist, ist $g$ somit beschränkt, nach Liouville also konstant, kann also wegen $\lim\limits_{|z|\to\infty} |g(z)| = 0$ nur die Nullfunktion sein. □

Schließlich lautet $\mathrm{Res}_{z_j}(f) = \lim\limits_{z\to z_j}(z-z_j)f(z) = \frac{p(z_j)}{(z_j-z_1)\cdots(z_j-z_{j-1})(z_j-z_{j+1})\cdots(z_j-z_n)}$

**H7.3. Residuenkalkül II**

Zeigen Sie:

(a) $$\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1-2p\cos t+p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2} \quad \text{für alle } p\in\mathbb{C} \text{ mit } |p|<1$$

(b) $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{b}\mathrm{e}^{-b|k|} \quad \text{für alle } b>0$$

Hinweis: Schreiben Sie das Integral in (a) als Kurvenintegral entlang des Einheitskreises. Man substituiere in (b) für $k>0$ einfach $x$ durch $-x$.

Lösung:

(a) Beh $$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1-2p\cos t+p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2} \quad \text{für alle } p\in\mathbb{C} \text{ mit } |p|<1$$

Bew Mit dem Weg $\gamma(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t\in[0,2\pi]$, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1-2p\cos t+p^2} &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(1-p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})+p^2)} = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z(1-pz-p/z+p^2)} \\ &= \mathrm{i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{pz^2-(1+p^2)z+p}.\end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass $p\neq 0$ (für $p=0$ können wir die Behauptung direkt verifizieren). Die Nullstellen des Nenners sind $z_1=p$ und $z_2=1/p$. Das Residuum bei $z_1$ ist

$$\mathrm{Res}_{z_1}\left(\frac{\mathrm{i}}{pz^2-(1+p^2)z+p}\right) = \frac{\mathrm{i}}{2pz_1-(1+p^2)} = \frac{\mathrm{i}}{p^2-1}.$$

Somit ergibt sich gemäss Vorlesung,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1-2p\cos t+p^2} = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{i}}{p^2-1} = \frac{2\pi}{1-p^2}.$$

□

(b) 1. Fall: $\alpha := -k > 0$. Das einzige Residuum in der oberen Halbebene ist bei $\mathrm{i}b$, Zählergrad ist kleiner als Nennergrad. Laut Vorlesung ist dann

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}b}\Big(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha z}}{z^2+b^2}\Big) = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\mathrm{i}b}}{(\mathrm{i}b+\mathrm{i}b)} = \frac{\pi}{b}\mathrm{e}^{kb} = \frac{\pi}{b}\mathrm{e}^{-|k|b}.$$

2.Fall: $k=0$

Für $k=0$ fällt der Integrand schnell genug ab, und wir erhalten gemäss Vorlesung,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+b^2} = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}b}\left(\frac{1}{z^2+b^2}\right) = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2\mathrm{i}b} = \frac{\pi}{b}.$$

3. Fall: $\alpha := k > 0$. Substitution von $x \mapsto -x$ ergibt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{x^2 + b^2} \,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}}{x^2 + b^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{b}\mathrm{e}^{-\alpha b} = \frac{\pi}{b}\mathrm{e}^{-|k|b}.$$

Zusammen ergeben die 3 Fälle die Behauptung. $\square$