TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. S. KANIBER
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2020W

Wintersem. 2020/21
Blatt 7
(17.12.2020)

Zentralübung

Z7.1. Wurzelsingularität

Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z)^2 = z$?

Z7.2. Isolierte Singularitäten

(a) Zeigen Sie: Sind $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph und ist $z_0 \in U$ eine k-fache Nullstelle von f und eine l-fache Nullstelle von g, dann besitzt $\frac{f}{g}$ eine isolierte Singularität bei z_0, die

- für $k \geq l$ eine hebbare Singularität, nämlich sogar eine $(k-l)$-fache Nullstelle von $\frac{f}{g}$ ist. (wobei 0-fache Nullstelle für *keine* Nullstelle steht).
- für $k < l$ ein Pol $(l-k)$-ter Ordnung ist.

Klassifizieren Sie nun die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen:

(b) $f(z) = \frac{z-1}{(z^4-1)^2}$, (c) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$, (d) $f(z) = z^2 \mathrm{e}^{-z^{-4}}$, (e) $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$.

Z7.3. Residuen von Einheitswurzeln

(a) Für $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, zeige man $\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{f(z)}{z^n-c}\right) = \frac{z_0 f(z_0)}{nc}$, falls $f(z)$ bei z_0 holomorph und z_0 eine Nullstelle des Nenners ist.

(b) Geben Sie alle Residuen von $\frac{1}{1+z^{2n}}$ an.

(c) Bestimmen Sie $\oint\limits_{\partial G} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^{2n}}$, wobei $G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < R, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und $R > 1$?

(d) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}$.

Präsenzaufgaben

P7.1. Laurentreihenentwicklung

(a) Geben Sie alle Laurentreihenentwicklungen von $\frac{1}{z-z_0}$ um 0 an, wobei $z_0 \in \mathbb{C}$.

(b) Geben Sie alle Laurententwicklungen von $\frac{1}{(z-2)(z-1)}$ im Ursprung an.

P7.2. Anwendung des Residuensatzes

Berechnen Sie $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{b+\sin t}$ für $b > 1$. HINWEIS: Man schreibe das Integral als komplexes Kurvenintegral mit holomorphem Integranden entlang der Kurve $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

P7.3. Residuenkalkül

Berechnen Sie (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x$.

Hausaufgaben

H7.1. Laurentreihenentwicklungen

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklungen einschließlich Konvergenzbereich auf punktierten Kreisscheiben um die isolierten Singularitäten von

(a) $f(z) = \frac{e^z}{(z+2)^3}$, (b) $f(z) = \frac{\sin z - z}{z^3}$, (c) $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z}$, (d) $f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}$.

Hinweis: In (d) genügen die ersten 3 von Null verschiedenen Terme der Laurentreihe.

H7.2. Spezialfall der Partialbruchzerlegung

Sei $f(z) = \frac{p(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)}$ mit paarweise verschiedenen $z_1, \ldots, z_n$, $n \in \mathbb{N}$, und einem Polynom p vom Grad kleiner n und keiner Nullstelle bei z_j, $j = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie:

$$\frac{p(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\operatorname{Res}_{z_j}(f)}{z - z_j}.$$

Wie kann man $\operatorname{Res}_{z_j}(f)$ bestimmen? Hinweis: Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der Differenz der beiden Seiten.

H7.3. Residuenkalkül II

Zeigen Sie:

(a) $$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 - 2p\cos t + p^2} = \frac{2\pi}{1-p^2} \quad \text{für alle } p \in \mathbb{C} \text{ mit } |p| < 1$$

(b) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{x^2 + b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{b}\mathrm{e}^{-b|k|} \quad \text{für alle } b > 0$$

Hinweis: Schreiben Sie das Integral in (a) als Kurvenintegral entlang des Einheitskreises. Man substituiere in (b) für $k > 0$ einfach x durch $-x$.

Hausaufgabenabgabe: Freitag, 15.1.2020, bis 12:00 in Moodle, maximal zu zweit