TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. S. Kaniber
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2020W

Wintersem. 2020/21
Lösungsblatt 6
(10.12.2020)

Zentralübung

Z6.1. Gleichmäßige Konvergenz holomorpher Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie:

(a) Für eine beliebige Kurve $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,1], U)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$.

(b) f ist holomorph.

(c) Für alle $z \in U$ ist $f'(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(z)$.

Lösung:

(a) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \big(f_n(\gamma(t))\gamma'(t)\big)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z,$$

da der Integrand $t \mapsto f_n(\gamma(t))\gamma'(t)$ gleichmäßig konvergiert:

$$\sup_{t\in[0,1]} |f_n(\gamma(t))\gamma'(t) - f(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq \underbrace{\sup_{z\in U} |f_n(z) - f(z)|}_{\to 0} \underbrace{\sup_{t\in[0,1]} |\gamma'(t)|}_{<\infty} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) Sei $z \in U$ und $\mathrm{B}_\epsilon(z) \subseteq U$. Für eine beliebige geschlossene Kurve in $\mathrm{B}_\epsilon(z)$ gilt dann

$$\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z \overset{\text{(a)}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\oint_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z}_{=0} = 0,$$

nach dem Cauchyschen Integralsatz, da die f_n holomorph sind und γ nullhomotop ist. Da f als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen selbst stetig ist, liefert der Satz von Morera, dass f in $\mathrm{B}_\epsilon(z) \subseteq U$ holomorph ist.

(c) Nach der Formel für die Potenzreihenentwicklung gilt für jedes $z_0 \in U$ und $\epsilon > 0$ mit $\overline{\mathrm{B}_\epsilon(z_0)} \subseteq U$, dass

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} f_n'(z_0),$$

denn der Integrand konvergiert gleichmäßig wie in (a), da entlang des Integrationswegs $\left|\frac{1}{(z-z_0)^2}\right| = \frac{1}{\epsilon^2}$ gilt.

Z6.2. Anwendung des Satzes von Liouville

(a) Ist $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein nichtkonstantes Polynom, so ist $p(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

(b) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und nicht konstant. Dann ist $f(\mathbb{C})$ offen und dicht in $\mathbb{C}$.
Hinweis: Unter der Annahme $a \notin \overline{f(\mathbb{C})}$ betrachte man $z \mapsto \frac{1}{f(z)-a}$.

(c) Man gebe ein Beispiel mit $f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}$.

Lösung:

(a) Sei p ein nichtkonstantes Polynom. Für $c \in \mathbb{C}$ hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra das Polynom $z \mapsto p(z) - c$ eine Nullstelle z_0. Somit ist $p(z_0) = c$, d.h., $c \in p(\mathbb{C})$.
Die Aussage "Alle nichtkonstanten Polynome sind surjektiv" ist also äquivalent zum Fundamentalsatz der Algebra.

(b) Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $f(\mathbb{C})$ offen, da $\mathbb{C}$ offen und f holomorph ist.
Der Satz von Liouville besagt, dass die einzigen beschränkten ganzen Funktionen die konstanten Funktionen sind.
Sei nun f ganz und nicht konstant. Annahme: Es gibt ein $a \in \mathbb{C}$ mit $a \notin \overline{f(\mathbb{C})}$. Da $\mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C})}$ offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(a) \cap \overline{f(\mathbb{C})} = \emptyset$. Das bedeutet aber, dass $|f(z) - a| \geq \epsilon$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Somit ist die Funktion $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und beschränkt durch $\frac{1}{\epsilon}$. Nach dem Satz von Liouville ist g und damit auch f konstant. Widerspruch.

(c) Es gilt $0 \notin \exp(\mathbb{C})$, denn für $z \in \mathbb{C}$ ist $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z)) > 0$.

Z6.3. Anwendungen des Identitätssatzes

Wieviele im Ursprung holomorphe Funktionen f gibt es, für die jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2-2}$, (b) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n}$, (c) $f(\pi n) = 0$, (d) $f^{(n)}(0) = (n!)^2$.

Lösung:

(a) Eine. Für die Funktion $g(z) = \frac{1}{\frac{1}{z^2}-2} = \frac{z^2}{1-2z^2}$ gilt $f(z) = g(z)$ für $z \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Diese Menge hat den Häufungspunkt 0. Ist nun U eine offene Umgebung von 0, die $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ nicht enthält, so ist nach dem Identitätssatz $g|_U$ die einzige holomorphe Funktion mit der geforderten Eigenschaft.

(b) Keine. Für gerade n gilt $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n}$. Annahme: Es gibt eine solche holomorphe Funktion. Dann gilt also $f(z) = z$ für unendlich viele Punkte $z \in \{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ mit Häufungspunkt 0. Also gilt $f(z) = z$ auf einer Umgebung der 0. Dies steht im Widerspruch zu $f(\frac{1}{2n+1}) = -\frac{1}{2n+1}$ für n groß genug. Somit gibt es keine solche Funktion.

(c) Unendlich viele. z.B. die Nullfunktion, $c \sin z$, $c \in \mathbb{C}$, $e^z \sin z$, usw.

(d) Keine. Gäbe es eine solche Funktion, dann hätte die Potenzreihenentwicklung von f, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ einen Konvergenzradius größer 0. Wegen $\sqrt[n]{n!} = \infty$ ist der Konvergenzradius aber gleich 0. Widerspruch.

Präsenzaufgaben

P6.1. Langsam wachsende ganze Funktionen

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz mit $f(z) = \mathcal{O}(|z|^k)$ für $|z| \to \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist f ein Polynom, höchstens vom Grad k.

LÖSUNG:

Der Beweis geht praktisch genauso wie der Beweis des Satzes von Liouville aus der Vorlesung.
Es gibt also $C, R > 0$, so dass $|f(z)| \le C|z|^k$ für alle $|z| \ge R$. Wie in der Vorlesung entwickeln wir $f(x)$ als Potenzreihe um 0: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \mathrm{d}z$, wobei $r \ge R$. Dann ist nach der Standardabschätzung

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi} 2\pi r \sup_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \le \frac{\sup_{|z|=r} |f(z)|}{r^n} \le \frac{Cr^k}{r^n} = Cr^{k-n}$$

für alle $r \ge R$. Im Limes $r \to \infty$ ergibt sich für $n < k$ keine Einschränkung an c_n, $|c_k| \le C$, und für $n > k$, $c_n = 0$. f ist also ein Polynom von der Form $f(z) = \sum_{n=0}^{k} c_n z^n$.

P6.2. Der Identitätssatz

Seien f und g holomorphe Funktionen.

(a) Sei $f(z) = \ln(z)$, der Hauptzweig des Logarithmus, $g(z) = \ln(-z) + \mathrm{i}\pi$. Zeigen Sie, dass f und g auf $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ übereinstimmen. Dennoch gilt $f \ne g$.

(b) Sei $U = \mathbb{C}$, $f(z) = g(z)$ für $z \in \mathbb{Z}$. Man gebe ein Beispiel für $f \ne g$.

(c) Ist $g(z) = z^2 \sin \frac{\pi}{z}$ ein Gegenbeispiel zum Identitätssatz, da doch $g(\frac{1}{n}) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$?

LÖSUNG:

Der Identitätssatz kann so formuliert werden: Zwei holomorphe Funktionen auf einem Gebiet, d.h. offen, nichtleer und zusammenhängend, sind genau dann gleich, wenn sie auf einer Menge übereinstimmen, die einen Häufungspunkt im Gebiet hat, bzw., wenn ihre Potenzreihenentwicklungen in einem Punkt übereinstimmen.

(a) Die beiden Funktionen stimmen auf der oberen Halbebene überein: Für $z = re^{\mathrm{i}\phi} \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ gilt $\phi \in]0, \pi[$ und somit $f(z) = \ln(r) + \mathrm{i}\phi$, $g(z) = \ln(re^{\mathrm{i}\phi - \mathrm{i}\pi}) = \ln(r) + \mathrm{i}(\phi - \pi) + \mathrm{i}\pi$, also $f(z) = g(z)$.
Trotzdem gilt $f(-\mathrm{i}) = \ln(-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}\frac{\pi}{2}$, $g(-\mathrm{i}) = \log(\mathrm{i}) + \mathrm{i}\pi = \frac{3}{2}\mathrm{i}\pi$, also $f(-\mathrm{i}) \ne g(-\mathrm{i})$.
Dies ist kein Widerspruch zum Identitätssatz, da die Definitionsbereiche der Funktionen $f : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ und $g : -\mathbb{C}^- \to \mathbb{C}$ nicht übereinstimmen. Der gemeinsame Definitionsbereich $\mathbb{C}^- \cap (-\mathbb{C}^-) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ dagegen ist nicht zusammenhängend, also kein Gebiet.

(b) $f(z) = 0$, $g(z) = \sin \pi z$.

(c) Der Definitionsbereich von g ist $U = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Es gilt zwar im Reellen $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{R}}} g(x) = 0$.
Im Häufungspunkt von $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist $g(z)$ jedoch nicht holomorph (fortsetzbar), da $\mathrm{i}g(\frac{\mathrm{i}}{n}) = -\frac{\mathrm{i}}{n^2} \sin(-\mathrm{i}\pi n) = -\frac{1}{n^2} \sinh(\pi n) \to -\infty$. Somit greift der Identitätssatz (Vergleich mit der Nullfunktion) nicht.
$z = 0$ ist sogar eine wesentliche Singularität, also kein Pol endlicher Ordnung, da für $z_n = \frac{\mathrm{i}}{n}$, $k \in \mathbb{N}$, gilt: $|z_n^k g(z_n)| \to \infty$.

P6.3. Variationen des Maximumprinzips

Sei U ein Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie:

(a) Besitzt $|f|$ ein lokales Maximum, so ist f konstant.

(b) Besitzt $\mathrm{Re}(f)$ ein lokales Maximum oder Minimum, so ist f konstant.

(c) Besitzt $\mathrm{Im}(f)$ ein lokales Maximum oder Minimum, so ist f konstant.

LÖSUNG:

VORBEMERKUNG:

- Aus Analysis 2 wissen wir: Das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist wieder zusammenhängend. Aus dem "Satz von der offenen Abbildung" folgt somit sofort, dass nichtkonstante holomorphe Funktionen Gebiete auf Gebiete abbilden. Diese Eigenschaft wird oft als **Gebietstreue** nichtkonstanter holomorpher Funktionen bezeichnet.
- Das **Maximumprinzip** aus der Vorlesung lautet: Für eine holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ auf dem Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ gilt: Nimmt die Funktion $z \mapsto |f(z)|$ auf der offenen Menge U ihr Supremum an, dann ist f konstant.

(a) Zu beweisen ist die Bemerkung aus der Vorlesung über das lokale Maximumprinzip. $a \in U$ lokales Maximum von $|f|$ bedeutet, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $|f(z)| \leq |f(a)|$ für $z \in U_\varepsilon(a)$. Nach dem Maximumsprinzip ist f auf $U_\varepsilon(a)$ konstant. Nach dem Identitätssatz ist dann f auf ganz U konstant.

(b) $a \in U$ lokales Maximum von $\mathrm{Re}(f)$ bedeutet, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $\mathrm{Re}(f(z)) \leq \mathrm{Re}(f(a))$ für $z \in U_\varepsilon(a)$.
Annahme: f ist auf $U_\varepsilon(a)$ nicht konstant. Dann ist $f(U_\varepsilon(a))$ offen. Es gibt also ein $r > 0$ mit $U_r(f(a)) \subset f(U_\varepsilon(a))$. D.h. es gibt ein $z \in U_\varepsilon(a)$ mit $\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(f(a)) \pm \frac{r}{2}$. Widerspruch.
Gleiches Argument für lokales Minimum.

(c) Man ersetze in (b) Re durch Im.

Hausaufgaben

H6.1. Anwendung des Satzes von Liouville

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = f(z+1) = f(z+\mathrm{i})$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

LÖSUNG:

Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es $n, m \in \mathbb{Z}$ und ein $z_0 \in [0,1] + \mathrm{i}[0,1]$ mit $z = n + \mathrm{i}m + z_0$. Da $f|_{[0,1]+\mathrm{i}[0,1]}$ beschränkt ist, ist es auch f. Nach dem Satz von Liouville ist f schon konstant.

H6.2. Komposition ganzer Funktionen

Zeigen Sie für ganze Funktionen f, g mit $g \circ f = 0$, dass $g = 0$ oder f konstant ist.

LÖSUNG:

(i) *Mit Identitätssatz und Stetigkeit:* Sei $g \neq 0$. Zu zeigen ist, dass f konstant ist.
Wegen der Isoliertheit von Nullstellen ist $g^{-1}(\{0\})$ eine diskrete Menge. Da f stetig ist muss $f(\mathbb{C}) \subseteq g^{-1}(\{0\})$ zusammenhängend sein. Also ist $f(\mathbb{C})$ einpunktig, mit anderen Worten, f ist konstant. $\square$

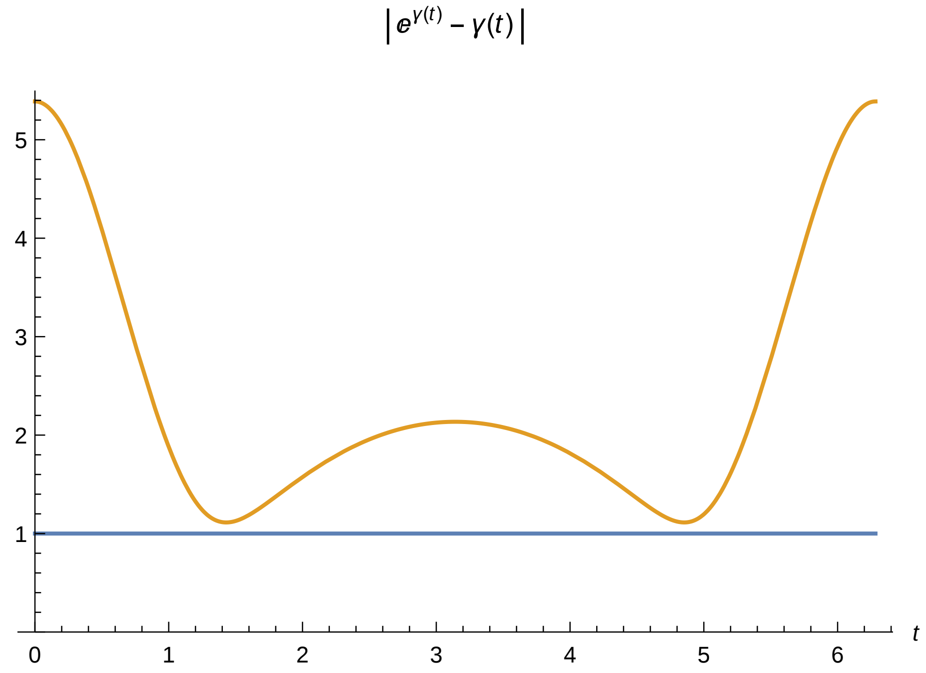
(ii) *Mit Gebietstreue:* Sei f nicht konstant. Zu zeigen ist $g = 0$.
Wegen der Gebietstreue ist $f(\mathbb{C})$ wieder ein Gebiet. Da $g(f(\mathbb{C})) = \{0\}$ kein Gebiet ist, muss g konstant und damit gleich 0 sein. $\square$

H6.3. Minimumprinzip

Begründen Sie, dass die Gleichung $\mathrm{e}^z = z$ eine Lösung mit $|z| < 2$ besitzt.
Hinweis: Minimumprinzip. Werten Sie $|\mathrm{e}^z - z|$ für $|z| = 2$ numerisch (durch einen geeigneten Plot) aus.

Lösung:

Mit $\gamma(t) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, ergibt der Plot



dass $|\mathrm{e}^z - z| > 1$ für $|z| = 2$. Für $f(z) = \mathrm{e}^z - z$ gilt somit $f(0) = 1 < \min\limits_{|z|=2} |f(z)|$. Da f auf $\overline{\mathrm{B}_2(0)}$ stetig ist, nimmt $z \mapsto |f(z)|$ dort sein Minimum an. Da dieses im Inneren liegen muss, kann es nur eine Nullstelle von f sein.
D.h., f besitzt eine Nullstelle z_0 in $B_2(0)$, es gilt also $\mathrm{e}^{z_0} = z_0$ (Numerisch: $z_0 \approx 0.32 \pm 1.34\mathrm{i}$)