Zentralübung

Z6.1. Gleichmäßige Konvergenz holomorpher Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \to \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen, die gleichmäßig gegen $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie:

(a) Für eine beliebige Kurve $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,1], U)$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$.

(b) f ist holomorph.

(c) Für alle $z \in U$ ist $f'(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(z)$.

Z6.2. Anwendung des Satzes von Liouville

(a) Ist $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein nichtkonstantes Polynom, so ist $p(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

(b) Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz und nicht konstant. Dann ist $f(\mathbb{C})$ offen und dicht in $\mathbb{C}$.
Hinweis: Unter der Annahme $a \notin \overline{f(\mathbb{C})}$ betrachte man $z \mapsto \frac{1}{f(z)-a}$.

(c) Man gebe ein Beispiel mit $f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}$.

Z6.3. Anwendungen des Identitätssatzes

Wieviele im Ursprung holomorphe Funktionen f gibt es, für die jeweils für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2-2}$, (b) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n}$, (c) $f(\pi n) = 0$, (d) $f^{(n)}(0) = (n!)^2$.

Präsenzaufgaben

P6.1. Langsam wachsende ganze Funktionen

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz mit $f(z) = \mathcal{O}(|z|^k)$ für $|z| \to \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist f ein Polynom, höchstens vom Grad k.

P6.2. Der Identitätssatz

Seien f und g holomorphe Funktionen.

(a) Sei $f(z) = \ln(z)$, der Hauptzweig des Logarithmus, $g(z) = \ln(-z) + \mathrm{i}\pi$. Zeigen Sie, dass f und g auf $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ übereinstimmen. Dennoch gilt $f \neq g$.

(b) Sei $U = \mathbb{C}$, $f(z) = g(z)$ für $z \in \mathbb{Z}$. Man gebe ein Beispiel für $f \neq g$.

(c) Ist $g(z) = z^2 \sin\frac{\pi}{z}$ ein Gegenbeispiel zum Identitätssatz, da doch $g(\frac{1}{n}) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$?

P6.3. Variationen des Maximumprinzips

Sei U ein Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie:

(a) Besitzt $|f|$ ein lokales Maximum, so ist f konstant.

(b) Besitzt $\mathrm{Re}(f)$ ein lokales Maximum oder Minimum, so ist f konstant.

(c) Besitzt $\mathrm{Im}(f)$ ein lokales Maximum oder Minimum, so ist f konstant.

Hausaufgaben

H6.1. Anwendung des Satzes von Liouville

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = f(z+1) = f(z+\mathrm{i})$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

H6.2. Komposition ganzer Funktionen

Zeigen Sie für ganze Funktionen f, g mit $g \circ f = 0$, dass $g = 0$ oder f konstant ist.

H6.3. Minimumprinzip

Begründen Sie, dass die Gleichung $\mathrm{e}^z = z$ eine Lösung mit $|z| < 2$ besitzt.
Hinweis: Minimumprinzip. Werten Sie $|\mathrm{e}^z - z|$ für $|z| = 2$ numerisch (durch einen geeigneten Plot) aus.

Hausaufgabenabgabe: Freitag, 8.1.2021, bis 12:00 in Moodle, maximal zu zweit