Zentralübung

Z5.1. Potenzreihenentwicklungssatz für Potenzreihen

Sei $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ein Potenzreihe mit, $a_n \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R > 0$. Man begründe:

(a) f ist auf $\mathrm{B}_R(z_0)$ definiert und stetig.

(b) f ist in z_0 komplex differenzierbar und $f'(0) = a_1$.

(c) Für $w_0 \in \mathrm{B}_R(z_0)$ gibt es $b_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $z \in \mathrm{B}_{R-|w_0-z_0|}(w_0)$ gilt:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-w_0)^k.$$

(d) Folgern Sie, dass f auf $\mathrm{B}_R(z_0)$ holomorph ist mit $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$.

LÖSUNG:

(a) In Analysis 1 wurde bei der Einführung der Potenzreihen gezeigt, dass explizit gilt:

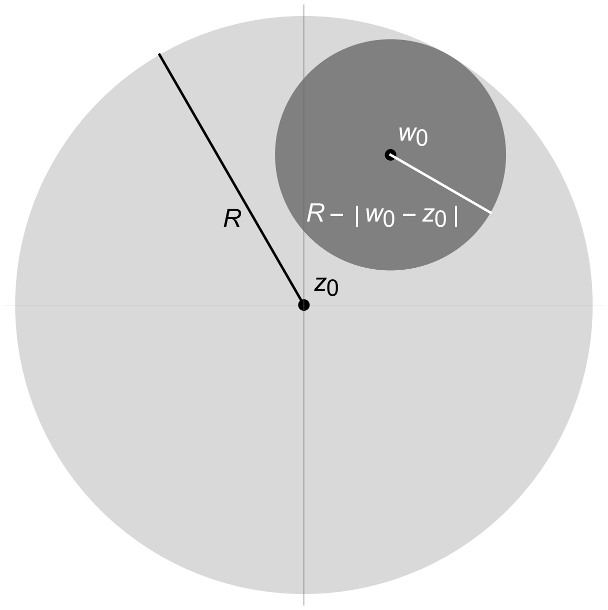
$$R = \big(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\big)^{-1} \qquad \text{(Cauchy-Hadamard-Formel)},$$

und dass die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für $|z-z_0| < R$ **absolut** konvergiert, für $|z-z_0| > R$ hingegen divergiert.
Weiter wurde bei der Behandlung der gleichmäßigen Konvergenz gezeigt, dass die Funktionenfolge der Teilsummen $z \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$ für alle $r < R$ auf $\overline{\mathrm{B}_r(z_0)}$ gleichmäßig konvergiert. Die Grenzfunktion f ist also stetig auf $\mathrm{B}_R(z_0)$.

(b) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $z_0 = 0$. Dann gilt

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - a_0\Big) = \lim_{z\to 0} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}}_{=:g(z)} = a_1,$$

da g den selben Konvergenzradius wie f hat, bei $z = 0$ also stetig ist und somit $\lim\limits_{z\to 0} g(z) = g(0) = a_1$ gilt.



(c) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir wieder $z_0 = 0$. Dann gilt (siehe Abb.) für $z \in \mathrm{B}_{R-|w_0|}(w_0)$ (d.h. $|z - w_0| < R - |w_0|$):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w_0 + w_0)^n \overset{\text{Binom.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w_0^{n-k} (z - w_0)^k$$
$$\overset{\text{Distr.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n w_0^{n-k} (z - w_0)^k \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n w_0^{n-k}}_{=:b_k} (z - w_0)^k$$
$$\overset{(**)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - w_0)^k.$$

($*$) Man überzeuge sich, dass in beiden Doppelsummen exakt die selben Summanden auftauchen. Die Reihenfolge der Summanden spielt bei absoluter Konvergenz keine Rolle. Hier ist sie gegeben, denn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} a_n w_0^{n-k} (z - w_0)^k \right| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |w_0|^{n-k} |z - w_0|^k$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (\underbrace{|w_0| + |z - w_0|}_{<R})^n < \infty.$$

($**$) Da die gesamte Doppelsumme somit absolut konvergent ist, sind auch die Teilsummen

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n w_0^{n-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} a_{m+k} w_0^m$$

für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ absolut konvergent.

(d) Sei $w_0 \in \mathrm{B}_R(z_0)$. Nach (c) ist $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k (z - w_0)^k$ und diese Potenzreihe hat mindestens den Konvergenzradius $R - |w_0 - z_0|$. Nach (b) ist f also in w_0 komplex differenzierbar mit $f'(w_0) = b_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n w_0^{n-1}$.

Z5.2. Homotopie und einfach zusammenhängende Mengen

Zeigen Sie:

(a) Die Kurve $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist nullhomotop in $\mathbb{C}$.

(b) Jede sternförmige Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

(c) Die Kurve $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht nullhomotop.

(d) Die Menge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

LÖSUNG:

(a) Wir wählen für $F \in C([0,1] \times [0, 2\pi], \mathbb{C})$ die Funktion $F(s,t) = (1-s)e^{\mathrm{i}t}$. Dann gilt $F(0,t) = e^{\mathrm{i}t} = \gamma(t)$ und $F(1,t) = 0 \in \mathbb{C}$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Also ist γ null-homotop.

(b) Sei $U \subset \mathbb{C}$ sternförmig mit Zentrum $z_0 \in U$. Zunächst ist U zusammenhängend, da wegzusammenhängen (zwei Punkte sind immer mit dem Umweg über das Zentrum verbunden). Sei $\gamma : [0,1] \to U$ ein geschlossener Weg. Dann ist die Funktion $F(s,t) = (1-s)(\gamma(t) - z0) + z_0$ stetig auf $[0,1] \times [0,1]$ mit Bildern in U und $F(0,t) = \gamma(t)$ und $F(1,t) = z_0$ für alle $t \in [0,1]$. Also ist U einfach zusammenhängend.

(c) Wäre γ null-homotop in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, so müsste nach dem Satz von Cauchy-Goursat für jede auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion f gelten, dass $\oint\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ ist. Wir wissen aber schon, dass dies für $f(z) = \frac{1}{z}$ nicht gilt, obwohl f auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist:

$$\oint\limits_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

Also kann γ nicht null-homotop sein.
ANMERKUNG: Dies zeigt auch, dass $f(z) = \frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine holomorphe Stammfunktion besitzt. (Der Hauptzweig des Logarithmus als holomorphe Funktion ist z.B. nur auf dem sternförmigen $\mathbb{C}^-$ definiert.)

(d) Wäre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend, so müsste dort auch $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, null-homotop sein. Mit (c) folgt also: $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist *nicht* einfach zusammenhängend.

Z5.3. Komplexe Wegintegrale

Sei γ eine Kurve entlang des Randes von $G = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z, |z| < 2\}$.

Berechnen Sie (a) $\oint_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z$, (b) $\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z+1}$ und (c) $\oint_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\cos z}}{z+1}\mathrm{d}z$.

LÖSUNG:

Die Kurve γ wird zusammengesetzt aus
$\gamma_1 = t$, $t \in [0,2]$, $\dot{\gamma}_1(t) = 1$,
$\gamma_2(t) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\dot{\gamma}_2(t) = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$,
$\gamma_3 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(1-t)$, $t \in [0,1]$. Wegen der Parametrisierungsinvarianz des Kurvenintegrals gilt

$$\oint\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z =: \int\limits_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z.$$

Zur Erleichterung der folgenden Rechnung defineren wir
$\gamma_4(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}t$, $t \in [0,2]$, $\dot{\gamma}_4(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Diesmal gilt

$$\int\limits_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = -\int\limits_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z =: \int\limits_{-\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z.$$

Somit gilt

(a)

$$\oint\limits_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z = \oint\limits_{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_4} \bar{z}\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^2 t\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^{\pi/4} 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t - \int\limits_0^2 e^{-i\frac{\pi}{4}}te^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t = 2 + \mathrm{i}\pi - \int\limits_0^2 t\mathrm{d}t = \mathrm{i}\pi.$$

(b) $z \mapsto \ln(z+1)$ ist Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z+1}$, z.B. auf $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > -1\}$ und $\partial G \subseteq U$. Somit ist das geschlossene Kurvenintegral $\oint\limits_\gamma \frac{1}{z+1}\mathrm{d}z = 0$.

(c) Hier kann eine Stammfunktion nicht explizit angegeben werden. Dennoch gilt

$$\oint\limits_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\cos z}}{z+1}\mathrm{d}z = 0 \quad \text{wegen Cauchy-Integralsatz, da Integrand holomorph auf } \{\mathrm{Re}(z) > -1\}.$$

Präsenzaufgaben

P5.1. Kurvenintegrale

(a) Berechnen Sie $\oint\limits_{|z|=R} z^n \mathrm{d}z$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Berechnen Sie $\oint\limits_{|z|=R} \overline{z}^n \mathrm{d}z$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Warum kann $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion haben?

Lösung:

(a) $\gamma(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\oint_{|z|=R} z^n \mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \mathrm{i}R^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\mathrm{d}t = \begin{cases} \mathrm{i}R^{n+1}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{\mathrm{i}(n+1)}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{für } n \neq -1, \\ 2\pi\mathrm{i} & \text{für } n = -1, \end{cases}$$

Für $n \neq -1$ kann man natürlich auch mit der Existenz einer Stammfunktion von $z \mapsto z^n$, nämlich $F : z \mapsto \frac{z^{n+1}}{n+1}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, argumentieren: $\oint_{|z|=R} z^n \mathrm{d}z = F(1) - F(1) = 0$.

(b) $\oint_{|z|=R} \overline{z}^n \mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} (R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})^n \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \mathrm{i}R^{n+1} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)t}\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}\, R^2 \delta_{n,1}$.

(c) Wäre $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z}$, so würde für $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$ gelten:

$$0 = F(1) - F(1) = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = \oint\limits_\gamma F'(z)\mathrm{d}z = \oint\limits_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z \overset{(a)}{=} 2\pi\mathrm{i}.$$

Widerspruch.

P5.2. Sternförmige Mengen sind einfach zusammenhängend

Zeigen Sie:

(a) Jede sternförmige Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

(b) $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

Lösung:

(a) Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ sternförmig mit Zentrum $z_0 \in A$. Dann ist A wegzusammenhängend, also auch zusammenhängend, da zwei Punkte $w, z \in A$ immer über durch einen Streckenzug über das Zentrum miteinander verbunden werden können.
Sei $\gamma : [0, 1] \to A$ eine beliebige geschlossene Kurve in A. Zu zeigen ist, dass γ frei homotop zu einer konstanten Kurve γ_0 ist.
Dazu definiert man die Homotopie $H(t, s) = z_0 + s(\gamma(t) - z_0)$. H ist stetig differenzierbar und es ist $\gamma_0(t) = H(t, 0) = z_0$ und $\gamma(t) = H(t, 1)$ für $t \in [0, 1]$. Also ist γ nullhomotop.
Da jede geschlossene Kurve von A nullhomotop ist, folgt, dass A einfach zusammenhängend ist.

(b) Die geschlossene Kurve $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$ ist nicht nullhomotop in $\mathbb{C}^\times$, denn $z \mapsto \frac{1}{z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}^\times$ und $\oint_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \neq 0$. Also ist $\mathbb{C}^\times$ nicht einfach zusammenhängend.

P5.3. Potenzreihen gebrochen rationaler Funktionen

Bestimmen Sie Potenzreihenentwicklung und Konvergenzradius von

(a) $\frac{1}{z-a}$ im Punkt $y \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{C}$,

(b) $\frac{1}{1+z^2}$ im Punkt $y \in \mathbb{C} \setminus \{\pm\mathrm{i}\}$,

LÖSUNG:

(a) $$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-y)+(y-a)} = \frac{1}{y-a}\frac{1}{1-\frac{y-z}{y-a}} = \frac{1}{y-a}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{y-z}{y-a}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(y-a)^{n+1}}(z-y)^n.$$

Bestimmung des Konvergenzradius: Alternative

(i) Explizit: Absolute Konvergenz besteht genau dann, wenn $|z-y| < |a-y|$. Der Konvergenzradius ist also $|y-a|$.

(ii) Abstrakt: Das Korollar zum Potenzreihenentwicklungssatz garantiert, dass der Konvergenzradius größer gleich $|y-a|$ ist, das ist der Abstand des Entwicklungspunktes zum Rand $\{a\}$ des Definitionsbereiches der holomorphen Funktion. Der Konvergenzradius ist kleiner gleich $|y-a|$, sonst wäre $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ bei a stetig forsetzbar, insbesondere also beschränkt, was nicht der Fall ist.

(b) $$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} \overset{\text{PBZ}}{=} \frac{1}{2\mathrm{i}(z-\mathrm{i})} - \frac{1}{2\mathrm{i}(z+\mathrm{i})} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(y-z)^n}{(y-\mathrm{i})^{n+1}} - \sum_{n\geq 0}\frac{(y-z)^n}{(y+\mathrm{i})^{n+1}}\right)$$

$= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(y-\mathrm{i})^{n+1}} - \frac{1}{(y+\mathrm{i})^{n+1}}\right)(y-z)^n$. Der Konvergenzradius ist nach (a) gegeben durch $\min\{|y-\mathrm{i}|, |y+\mathrm{i}|\}$, was durch einzeichnen in der komplexen Ebene sofort einleuchtet, da die Konvergenzscheibe genau bis zur ersten auftretenden Singularität reicht.

Hausaufgaben

H5.1. Kurvenintegrale und Stammfunktionen

Berechnen sie $\int\limits_\gamma z\mathrm{e}^{\pi z^2}\mathrm{d}z$, wobei γ die Kurve von 0 nach $1+\mathrm{i}$ entlang eines Viertelkreises mit Mittelpunkt i ist.

LÖSUNG:

Wie im Reellen besitzt $f(z) = z\mathrm{e}^{\pi z^2}$ die Stammfunktion $F(z) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\pi z^2}$. Somit ist ohne auch nur eine Parametrisierung der Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ angeben zu müssen

$$\int\limits_\gamma z\mathrm{e}^{\pi z^2}\mathrm{d}z = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \frac{1}{2\pi}(\mathrm{e}^{\pi(1+\mathrm{i})^2} - \mathrm{e}^0) = \frac{1}{2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} - 1) = 0.$$

H5.2. Hauptzweig des komplexen Arcustangens

Der komplexe Arcustangens wird als die Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$ auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \mathrm{i}(\mathbb{R} \setminus]-1,1[)$ mit $\arctan(0) = 0$ definiert.

(a) Drücken Sie $\arctan(z)$ durch den komplexen Logarithmus aus.
HINWEIS: Partialbruchzerlegung. $\log(\pm\mathrm{i}z)$ ist Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf der nach oben/unten geschlitzten Ebene.

(b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\arctan(x+\mathrm{i}y)$ für $|y| < 1$.

(c) Skizzieren Sie die Höhenlinien von Real- und Imaginärteil des Arcustangens.
HINWEIS: Es sind Kreissegmente, deren Mittelpunkt und Radius Sie bestimmen sollen. $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\frac{x+y}{1-xy} + C$, wobei $C = 0$ für $xy < 1$ und $C = \operatorname{sgn}(x)\pi$ für $xy > 1$.

LÖSUNG:

(a) Das Gebiet $U = \mathbb{C} \setminus \mathrm{i}(\mathbb{R} \setminus]-1, 1[)$ ist sternförmig. Partialbruchzerlegung ergibt

$$\tfrac{1}{z^2+1} = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\big(\tfrac{1}{z-\mathrm{i}} - \tfrac{1}{z+\mathrm{i}}\big)$$

Eine Stammfunktion von $\frac{1}{z-\mathrm{i}}$ auf $\mathbb{C}^- + \mathrm{i}$ ist $\log(z - \mathrm{i})$. Durch Rotation erhählt man eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus (\mathrm{i}[1, \infty[)$. Somit ist $\log(\mathrm{i}(z - \mathrm{i}))$ Stammfunktion von $\frac{1}{z-\mathrm{i}}$ auf U. Analog ist $\log(-\mathrm{i}(z + \mathrm{i}))$ Stammfunktion von $\frac{1}{z+\mathrm{i}}$ auf U. Insgesamt erhält man

$$\arctan(z) = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\log(\mathrm{i}(z - \mathrm{i})) - \log(-\mathrm{i}(z + \mathrm{i})))$$

für $z \in U$, wie gefordert mit $\arctan(0) = 0$.

(b) Für $z = x + \mathrm{i}y$, $|y| < 1$, erhält man

$$\begin{aligned}
\arctan(x + \mathrm{i}y) &= \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\big(\log(\sqrt{x^2 + (y-1)^2}) + \mathrm{i}\arg(1 - y + \mathrm{i}x) \\
&\qquad - \log(\sqrt{x^2 + (y+1)^2}) - \mathrm{i}\arg(1 + y - \mathrm{i}x)\big) \\
&= \tfrac{1}{4\mathrm{i}}\log\tfrac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2} + \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{atn}(\tfrac{x}{1-y}) - \mathrm{atn}(\tfrac{-x}{1+y})\big) \\
&= \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{atn}(\tfrac{x}{1-y}) + \mathrm{atn}(\tfrac{x}{1+y})\big) + \mathrm{i}\tfrac{1}{4}\log\tfrac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2},
\end{aligned}$$

da für $a > 0$ gilt $\arg(a + \mathrm{i}b) = \mathrm{atn}(\frac{b}{a})$. Für $y = 0$ ergibt sich natürlich, dass der komplexe Arcustangens auf der reellen Achse mit dem reelen Arcustangens übereinstimmt.

(c) $\operatorname{Im}\arctan(x + \mathrm{i}y) = \frac{1}{4}\log\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}$ gilt übrigens auf ganz U und lässt sich sogar stetig auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm\mathrm{i}\}$ fortsetzen. Die Höhenlinien dieser Funktion sind gegeben durch $\operatorname{Im}\arctan(x + iy) = \mathit{const}$, bzw.

$$\begin{aligned}
x^2 + (y+1)^2 &= C(x^2 + (y-1)^2), \\
(1 - C)x^2 + (1 - C)y^2 + 2(1 + C)y &= C - 1, \\
x^2 + y^2 + 2\tfrac{1+C}{1-C}y &= -1, \\
x^2 + (y - \tfrac{C+1}{C-1})^2 &= -1 + (\tfrac{C+1}{C-1})^2 = \tfrac{(C+1)^2-(C-1)^2}{(C-1)^2} = \tfrac{4C}{(C-1)^2}.
\end{aligned}$$

Das sind also Kreise mit Mittelpunkt $\mathrm{i}\frac{C+1}{C-1}$ und Radius $\frac{\sqrt{4C}}{|C-1|}$.

$\operatorname{Re}\arctan(x + \mathrm{i}y) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{atn}(\frac{x}{1-y}) + \mathrm{atn}(\frac{x}{1+y})\big)$. Für $\frac{x^2}{1-y^2} < 1$, bzw. $x^2 + y^2 < 1$, ist nach der Formel aus dem Hinweis für den arctan

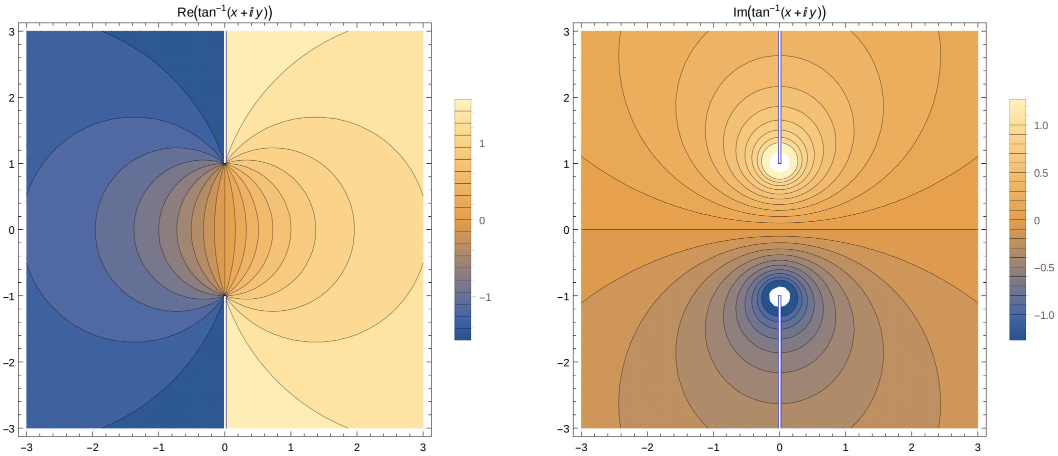
$$\operatorname{Re}\arctan(x + \mathrm{i}y) = \tfrac{1}{2}\mathrm{atn}\left(\frac{\frac{2x}{1-y^2}}{1 - \frac{x^2}{1-y^2}}\right) = \tfrac{1}{2}\mathrm{atn}\big(\tfrac{2x}{1-x^2-y^2}\big).$$

Für $x^2 + y^2 > 1$ gilt die gleiche Formel plus eine Konstante. Die Höhenlinien dieser Funktion sind in jedem Falle gegeben durch $\operatorname{Re}\arctan(x + iy) = \mathit{const}$, bzw.,

$$\begin{aligned}
\frac{2x}{1 - x^2 - y^2} &= C, \\
x^2 + y^2 + \tfrac{2}{C}x &= 1, \\
(x + \tfrac{1}{C})^2 + y^2 &= 1 + \tfrac{1}{C^2}.
\end{aligned}$$

Diese liegen auf Kreisen mit Mittelpunkt $-\frac{1}{C}$ auf der rellen Achse und Radius $1 + \frac{1}{C^2}$, so dass sie alle durch die Punkte $\pm\mathrm{i}$ laufen.

Um sich weitere Fallunterscheidungen zu sparen betrachten wir die Funktion geometrisch. Für $x > 0$ sind $\arg(1 - y + \mathrm{i}x)$ und $-\arg(1 + y - \mathrm{i}x) = \arg(1 + y + \mathrm{i}x)$ die beiden linken Innenwinkel des Dreiecks mit den Ecken $\mathrm{i}, -\mathrm{i}, x + \mathrm{i}y$. Somit ist $\pi - 2\operatorname{Re}\arctan(x + \mathrm{i}y)$ der rechte Innenwinkel dieses Dreiecks. Die Höhenlinien sind also Thaleskreise, alle Dreiecke mit Basis $[\mathrm{i}, -\mathrm{i}]$ und konstantem gegenüberliegendem Winkel haben ihre Spitze auf so einem Kreis.



H5.3. Die komplexe Errorfunktion und Fresnel-Integrale

Die komplexe Errorfunktion ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert als

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-w^2} \mathrm{d}w$$

und damit nach dem Satz von Cauchy-Goursat eine ganze Funktion.

(a) Drücken Sie die beiden unvollständigen Fresnel-Integrale $\mathrm{C}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t$ und $\mathrm{S}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ jeweils durch $\operatorname{erf}(z)$ aus. Hinweis: Man wähle $z = xe^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

(b) Zeigen Sie für die Kurve $\gamma(t) = re^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $r > 0$: $\left| \int_\gamma e^{-w^2}\mathrm{d}w \right| \leq \frac{\pi}{4r}$.

Hinweis: Man benutze $\cos(2t) \geq 1 - \frac{4t}{\pi}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

(c) Berechnen Sie $\int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x$ und $\int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x$ unter Benutzung von (a) und (b) und der bekannten reellen Asymptotik $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{erf}(x) = \pm 1$. Hinweis: Betrachten sie das Kurvenintegral entlang des Randes von $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \arg(z) \in [0, \frac{\pi}{4}], |z| \leq r\}$ für $r \to \infty$.

Lösung:

(a) Mit der Kurve $\gamma(t) = te^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, $t \in [0, x]$ gilt

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(xe^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \int_\gamma e^{-w^2}\mathrm{d}w = \int_0^x e^{-\mathrm{i}t^2} e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \int_0^x (\cos(t^2) - \mathrm{i}\sin(t^2))\mathrm{d}t.$$

Somit ist $\mathrm{C}(x) = \operatorname{Re}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \operatorname{erf}(xe^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})\Big)$ und $\mathrm{S}(x) = -\operatorname{Im}\Big(\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \operatorname{erf}(xe^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})\Big)$.

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\left| \int_\gamma e^{-w^2}\mathrm{d}w \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-r^2 \exp(2\mathrm{i}t)} \mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} r|e^{-r^2(\cos(2t)+\mathrm{i}\sin(2t))}|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} re^{-r^2\cos(2t)}\mathrm{d}t \overset{\text{Hinweis}}{\leq} \int_0^{\frac{\pi}{4}} re^{-r^2(1-\frac{4t}{\pi})}\mathrm{d}t = re^{-r^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{4tr^2}{\pi}}\mathrm{d}t \\
&= re^{-r^2}\left[\frac{\pi}{4r^2} e^{\frac{4tr^2}{\pi}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4r}(1 - e^{-r^2}) < \frac{\pi}{4r}
\end{aligned}$$

(c) Seien $\gamma_1(t) = t,\ t \in [0,r],\ \gamma_2(t) = re^{\mathrm{i}t},\ t \in [0,\frac{\pi}{4}],\ \gamma_3(t) = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}t,\ t \in [0,r]$. Dann gilt, da erf die Stammfunktion der ganzen Funktion $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-z^2}$ ist für den geschlossenen Weg $\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$

$$\oint\limits_{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z = 0.$$

Somit ist

$$\lim_{r\to\infty} \operatorname{erf}(re^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \lim_{r\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\gamma_3} e^{-z^2}\mathrm{d}z = \lim_{r\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int\limits_{\gamma_1} e^{-z^2}\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_2} e^{-z^2}\mathrm{d}z \right) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{erf}(x) = 1.$$

Wir erhalten also $\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x = \lim\limits_{x\to\infty} C(x) = \mathrm{Re}\Big(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \operatorname{erf}(xe^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ und genauso $\int\limits_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x = \lim\limits_{x\to\infty} S(x) = -\mathrm{Im}\Big(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \operatorname{erf}(xe^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.