PROF. DR. M. WOLF
DR. S. KANIBER
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2020W

Wintersem. 2020/21
Blatt 5
(3.12.2020)

Zentralübung

Z5.1. Potenzreihenentwicklungssatz für Potenzreihen

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ein Potenzreihe mit, $a_n \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R > 0$. Man begründe:

(a) f ist auf $\mathrm{B}_R(z_0)$ definiert und stetig.

(b) f ist in z_0 komplex differenzierbar und $f'(0) = a_1$.

(c) Für $w_0 \in \mathrm{B}_R(z_0)$ gibt es $b_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $z \in \mathrm{B}_{R-|w_0-z_0|}(w_0)$ gilt:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-w_0)^k.$$

(d) Folgern Sie, dass f auf $\mathrm{B}_R(z_0)$ holomorph ist mit $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$.

Z5.2. Homotopie und einfach zusammenhängende Mengen

Zeigen Sie:

(a) Die Kurve $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist nullhomotop in $\mathbb{C}$.

(b) Jede sternförmige Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

(c) Die Kurve $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht nullhomotop.

(d) Die Menge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

Z5.3. Komplexe Wegintegrale

Sei γ eine Kurve entlang des Randes von $G = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z, |z| < 2\}$.

Berechnen Sie (a) $\oint_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z$, (b) $\oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z+1}$ und (c) $\oint_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\cos z}}{z+1}\mathrm{d}z$.

Präsenzaufgaben

P5.1. Kurvenintegrale

(a) Berechnen Sie $\oint\limits_{|z|=R} z^n \mathrm{d}z$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Berechnen Sie $\oint\limits_{|z|=R} \overline{z}^n \mathrm{d}z$ für $R > 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Warum kann $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion haben?

P5.2. Sternförmige Mengen sind einfach zusammenhängend

Zeigen Sie:

(a) Jede sternförmige Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

(b) $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

P5.3. Potenzreihen gebrochen rationaler Funktionen

Bestimmen Sie Potenzreihenentwicklung und Konvergenzradius von

(a) $\frac{1}{z-a}$ im Punkt $y \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{C}$,

(b) $\frac{1}{1+z^2}$ im Punkt $y \in \mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\}$,

Hausaufgaben

H5.1. Kurvenintegrale und Stammfunktionen

Berechnen sie $\int\limits_\gamma z\mathrm{e}^{\pi z^2} \mathrm{d}z$, wobei γ die Kurve von 0 nach $1+\mathrm{i}$ entlang eines Viertelkreises mit Mittelpunkt i ist.

H5.2. Hauptzweig des komplexen Arcustangens

Der komplexe Arcustangens wird als die Stammfunktion von $z \mapsto \frac{1}{z^2+1}$ auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \mathrm{i}(\mathbb{R} \setminus]-1,1[)$ mit $\arctan(0) = 0$ definiert.

(a) Drücken Sie $\arctan(z)$ durch den komplexen Logarithmus aus.
Hinweis: Partialbruchzerlegung. $\log(\pm \mathrm{i}z)$ ist Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf der nach oben/unten geschlitzten Ebene.

(b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\arctan(x+\mathrm{i}y)$ für $|y| < 1$.

(c) Skizzieren Sie die Höhenlinien von Real- und Imaginärteil des Arcustangens.
Hinweis: Es sind Kreissegmente, deren Mittelpunkt und Radius Sie bestimmen sollen. $\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + C$, wobei $C = 0$ für $xy < 1$ und $C = \operatorname{sgn}(x)\pi$ für $xy > 1$.

H5.3. Die komplexe Errorfunktion und Fresnel-Integrale

Die komplexe Errorfunktion ist für $z \in \mathbb{C}$ definiert als

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-w^2} \mathrm{d}w$$

und damit nach dem Satz von Cauchy-Goursat eine ganze Funktion.

(a) Drücken Sie die beiden unvollständigen Fresnel-Integrale $\mathrm{C}(x) = \int\limits_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t$ und $\mathrm{S}(x) = \int\limits_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ jeweils durch $\operatorname{erf}(z)$ aus. Hinweis: Man wähle $z = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

(b) Zeigen Sie für die Kurve $\gamma(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $r > 0$: $\left| \int\limits_\gamma e^{-w^2} \mathrm{d}w \right| \leq \frac{\pi}{4r}$.
Hinweis: Man benutze $\cos(2t) \geq 1 - \frac{4t}{\pi}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

(c) Berechnen Sie $\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x$ und $\int\limits_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x$ unter Benutzung von (a) und (b) und der bekannten reellen Asymptotik $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{erf}(x) = \pm 1$. Hinweis: Betrachten sie das Kurvenintegral entlang des Randes von $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \arg(z) \in [0, \frac{\pi}{4}], |z| \leq r\}$ für $r \to \infty$.

Hausaufgabenabgabe: Freitag, 18.12.2020, bis 12:00 in Moodle, maximal zu zweit