



Zentralübung

Z4.1. Fluss eines Vektorfeldes durch ein Flächenstück

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$ das durch die beiden Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ aufgespannte Parallelogramm mit dem bezüglich v_1, v_2 rechtshändigen Normalenvektorfeld v_A . Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ das konstante Vektorfeld $F(x) = F_0 \in \mathbb{R}^3$. Begründen Sie, dass der Fluss des Vektorfeldes F durch das Flächenstück A , $\Psi_F(A)$, gegeben ist durch

$$\Psi_F(A) = \int_A \langle F(x), v_A(x) \rangle dS(x).$$

LÖSUNG:

Das rechtshändige Normalenvektorfeld von A , $v_A : A \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, ist gegeben durch $v_A(x) = \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}$. Der zum Vektorfeld F gehörige Fluss $\Phi_F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist durch die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x} = F(x)$ gegeben, hier einfach $\Phi_F(t; x) = x + tF_0$. Durch den Fluss überstreicht A im Zeitintervall $[0, t]$ die Menge $V_t = \bigcup_{s \in [0, t]} \Phi_F(s; A)$. Den Fluss durch A entlang des Vektorfeldes F kann man nun definieren als das Volumen, das pro Zeiteinheit durch A "fließt",

$$\Psi_F(A) := \pm \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \text{vol}(V_t)$$

mit $+$, falls $\langle F, v_A \rangle \geq 0$ und $-$, falls $\langle F, v_A \rangle < 0$. V_t ist der von v_1, v_2 und tF_0 aufgespannte Spat, daher gilt $\text{vol}(V_t) = |\det(v_1 \ v_2 \ tF_0)|$. Wir erhalten

$$\Psi_F(A) = \det(v_1 \ v_2 \ F_0) = \langle F_0, v_1 \times v_2 \rangle = \langle F_0, v_A \rangle \|v_1 \times v_2\|$$

mit dem richtigen Vorzeichen. Für die Parametrisierung von A , $\Psi(r, s) = rv_1 + sv_2$, $r, s \in [0, 1]$ ist die Gramsche Determinante

$$g_\Psi(r, s) = \det(J_\Psi(r, s)^T J_\Psi(r, s)) = \|\partial_r \Psi(r, s) \times \partial_s \Psi(r, s)\|^2 = \|v_1 \times v_2\|^2.$$

Somit ist

$$\Psi_F(A) = \int_{[0,1]^2} \langle F(\Psi(r, s)), v_A(\Psi(r, s)) \rangle \sqrt{g_\Psi(r, s)} d(r, s) = \int_A \langle F(x), v_A(x) \rangle dS(x).$$

Z4.2. Oberflächenintegrale und der Satz von Gauß

Gegeben sei der Kegel $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}\}$ und das Vektorfeld $F(x, y, z) = (x - y, xz, x^2 + y^2 + z^2)$. Bestätigen Sie den Satz von Gauß explizit.

LÖSUNG:

Wir geben nun jeweils Parametrisierungen für die einzelnen Flächenstücke an.

Kegelmantel: $r \in]0, 1[$, $\phi \in]0, 2\pi[$,

$$\Psi(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ 2 - 2r \end{pmatrix}, \quad \partial_r \Psi \times \partial_\phi \Psi = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r \cos \phi \\ 2r \sin \phi \\ r \end{pmatrix}.$$

Kreisscheibe: $r \in]0, 1[$, $\phi \in]0, 2\pi[$,

$$\Phi(r, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_r \Phi \times \partial_\phi \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Beide Normalenfelder zeigen nach oben.

Der Fluss durch den Kegelmantel ist

$$\begin{aligned} \int_{\Psi} \langle F, v \rangle dS &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi \langle F(r \cos \phi, r \sin \phi, 2 - 2r), \partial_1 \Psi(r, \phi) \times \partial_2 \Psi(r, \phi) \rangle \\ &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi \left\langle \begin{pmatrix} r(\cos \phi - \sin \phi) \\ (2 - 2r)r \cos \phi \\ r^2 + (2 - 2r)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2r \cos \phi \\ 2r \sin \phi \\ r \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi (2r^2 \cos^2 \phi + 4r + r^3 - 8r^2 + 4r^3) = 2\pi \int_0^1 dr (4r - 7r^2 + 5r^3) \\ &= 2\pi \left(4 \cdot \frac{1}{2} - 7 \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{4} \right) = \frac{11}{6} \pi. \end{aligned}$$

Der Fluss durch die Kreisscheibe ist

$$\begin{aligned} \int_{\Phi} \langle F, v \rangle dS &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi \langle F(r \cos \phi, r \sin \phi, 0), \partial_1 \Phi(r, \phi) \times \partial_2 \Phi(r, \phi) \rangle \\ &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\phi \left\langle \begin{pmatrix} r(\cos \phi - \sin \phi) \\ 0 \\ r^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \right\rangle = 2\pi \int_0^1 dr r^3 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Orientierung der durch die Parametrisierungen vorgegebenen Normalenfelder, so erhält man

$$\int_{\partial K} \langle F, v \rangle dS = \int_{\Psi} \langle F, v \rangle dS - \int_{\Phi} \langle F, v \rangle dS = \frac{11}{6} \pi - \frac{1}{2} \pi = \frac{4}{3} \pi.$$

Wegen $\operatorname{div} F(x, y, z) = 1 + 2z$ gilt für die Volumenintegrale

$$\int_K \operatorname{div} F d^3x = \operatorname{vol}(K)(1 + 2z_S) = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \right) = \frac{4}{3} \pi,$$

da das Volumen eines Kegels $\frac{1}{3}$ Grundfläche mal Höhe ist und s_z , die z -Komponente des Kegelschwerpunktes bei $\frac{1}{4}$ der Höhe liegt (nachrechnen!). *Bemerkung:* Die beiden Integrale stimmen überein, was den Gaußschen Integralsatz

$$\int_K \operatorname{div} F d^3x = \int_{\partial K} \langle F, v \rangle dS$$

bestätigt.

Z4.3. Satz von Stokes im \mathbb{R}^3

Es sei $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z, z \in (1/2, 1)\}$ ein Teil eines Paraboloids und $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y, z) = (yz, -xz, 1)$. Berechnen Sie $\int_M \langle \text{rot } F, v \rangle dS$ mit Hilfe des Satzes von Stokes, wobei v das stetige Normalenfeld an M ist, das nach außen zeigt.

LÖSUNG:

Es ist $M = \Phi(\Omega)$, wobei die Karte Φ durch $\Phi : \Omega = B_1(0) \setminus \overline{B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)} \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix},$$

gegeben ist. Es ist $\partial M := \Phi(\partial\Omega) = \gamma_1([0, 2\pi)) \cup \gamma_2([0, 2\pi))$, wobei

$$\gamma_1(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

wobei die Orientierung von ∂M nicht mit der Durchlaufrichtung von γ_1 übereinstimmt.

Die Voraussetzungen des Satzes von Stokes sind erfüllt: Φ lässt sich auf den Definitionsbereich $V := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ erweitern und ist eine Karte der C^2 -Untermannigfaltigkeit $\Phi(V)$, außerdem ist Ω offen und beschränkt mit C^1 -Rand und es gilt $\overline{\Omega} \subset V$. Das Vektorfeld F ist stetig differenzierbar auf \mathbb{R}^3 .

Mit dem Satz von Stokes folgt daher

$$\begin{aligned} \int_M \langle \text{rot } F, v \rangle dS &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial M} F(r) \cdot dr = - \int_{\gamma_1([0, 2\pi))} F(r) \cdot dr + \int_{\gamma_2([0, 2\pi))} F(r) \cdot dr \\ &= - \int_0^{2\pi} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt + \int_0^{2\pi} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin t \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt - \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} dt = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Präsenzaufgaben

P4.1. Das Coulombfeld einer Punktladung

Gegeben ist das Vektorfeld $E(x) = \frac{x}{\|x\|^3}, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

- Berechnen Sie die Divergenz von E .
- Berechnen Sie den Fluss von E durch den Rand von $B_R(0), R > 0$.
- Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt mit glattem Rand, $0 \notin \partial K$. Berechnen Sie $\int_{\partial K} \langle E, v \rangle dS$ für die beiden Fälle $0 \notin K$ und $0 \in K \setminus \partial K$. HINWEIS: Satz von Gauß.

LÖSUNG:

(a) $\text{div } E(x) = \sum_{i=1}^3 \partial_i \frac{x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} - \frac{3x_i^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{5/2}} \right) = \frac{3}{\|x\|^3} - \frac{3\|x\|^2}{\|x\|^5} = 0.$

- (b) Der Satz von Gauß ist nicht anwendbar, da E in $B_R(0)$ nicht stetig differenzierbar ist. Allerdings gilt für das äußere Normalenfeld v für $\|x\| = R$, dass

$$\langle E(x), v(x) \rangle = \|E(x)\| \cdot \|v(x)\| = \frac{1}{R^2},$$

da beide radial nach außen zeigen. Somit ist

$$\int_{\|x\|=\mathbb{R}} \langle E, v \rangle dS = \frac{1}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi$$

unabhängig von R .

(c) (i) $0 \notin K$. Also $K \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, d.h., E ist stetig differenzierbar auf einer offenen Umgebung von K . Der Satz von Gauß ergibt $\int_{\partial K} \langle E, v \rangle dS = \int_K \nabla \cdot E d^3x = 0$.

(ii) Ist $0 \in K \setminus \partial K$, so gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(0) \subseteq K \setminus \partial K$. $K_\epsilon := K \setminus B_\epsilon(0)$ ist wieder kompakt und erfüllt die Voraussetzungen von (i), also ist $\int_{\partial K_\epsilon} \langle E, v \rangle dS = 0$.

Wegen $\partial K_\epsilon = \partial K \cup \partial B_\epsilon(0)$ allerdings mit nach innen gerichtetem Normalenfeld auf $\partial B_\epsilon(0)$ gilt

$$\int_{\partial K} \langle E, v \rangle dS = \int_{\partial K_\epsilon} \langle E, v \rangle dS + \int_{\partial B_\epsilon(0)} \langle E, v \rangle dS = 4\pi.$$

P4.2. Ein magnetischer Monopol besitzt kein Vektorpotential

Gegeben ist das Vektorfeld $B(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. $A : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ offen heißt Vektorpotential von B auf U , wenn $\text{rot } A = B$ gilt. Zeigen Sie, dass B auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ kein Vektorpotential besitzt. HINWEIS: Widerspruchsbeweis mit Satz von Stokes für ein geeignetes Flächenstück.

LÖSUNG:

Annahme: Es gibt ein Vektorpotential $A : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ von B , also $B = \text{rot } A$, dann gilt für die nach außen orientierten Halbsphären $S_+ = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ und $S_- = -S_+$ jeweils der Satz von Stokes

$$\begin{aligned} \int_{S_+} \langle B, v \rangle dS &= \int_{\gamma} A(r) \cdot dr, \\ \int_{S_-} \langle B, v \rangle dS &= - \int_{\gamma} A(r) \cdot dr, \end{aligned}$$

mit der durch γ gegen den Uhrzeigersinn parametrisierten Einheitskreislinie in der xy -Ebene. Aus Symmetriegründen muss jedoch $\int_{S_+} \langle B, v \rangle dS = \int_{S_-} \langle B, v \rangle dS$ gelten. Wegen

$$\int_{S_+} \langle B, v \rangle dS + \int_{S_-} \langle B, v \rangle dS = 4\pi \text{ (Aufgabe P4.1) ist das ein Widerspruch.}$$

P4.3. Die zweite Greensche Formel

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand, äußerem Normalenfeld v und sei $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Die Richtungsableitung von g in $x \in \partial A$ bezüglich dem Vektorfeld v ist definiert als

$$\partial_v g(x) = \frac{d}{dt} g(x + tv(x)) \Big|_{t=0}.$$

(a) Überprüfen Sie, dass $\partial_v g(x) = \langle \text{grad } g(x), v(x) \rangle$, kurz $\partial_v g = \langle \nabla g, v \rangle$ gilt.

(b) Man beweise die zweite Greensche Formel

$$\int_{\partial A} (f \partial_v g - g \partial_v f) dS = \int_A (f \Delta g - g \Delta f) d^n x$$

mit Hilfe der ersten Greenschen Formel.

LÖSUNG:

(a) Für stetig differenzierbares g gilt mit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $h(t) = x + tv(x)$,

$$\partial_v g(x) = \frac{d}{dt} g(x + tv(x)) \Big|_{t=0} = (g \circ h)'(0) = J_g(h(0))h'(0) = \langle \nabla g(x), v(x) \rangle.$$

(b) Die erste Greensche Formel lautet jeweils unter Verwendung der Notation aus (a)

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} f \partial_v g \, dS &= \int_A (\langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g) d^n x, \\ \int_{\partial A} g \partial_v f \, dS &= \int_A (\langle \nabla g, \nabla f \rangle + g \Delta f) d^n x, \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Gleichung lediglich f und g vertauscht wurden. Die Differenz der beiden Gleichungen ergibt die zweite Greensche Formel.

Hausaufgaben

H4.1. Oberflächenintegrale von Vektorfeldern

Bestätigen Sie für den Paraboloidenstumpf

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$$

und das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) := (x + y, y + z, x + z)$ den Satz von Gauß.

LÖSUNG:

Wir parametrisieren die Bodenkreisfläche K von M durch $\Psi_K : [0, 2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\Psi_K(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0),$$

und die Paraboloidoberfläche P durch $\Psi_P : [0, 2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\Psi_P(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 4 - r^2).$$

Das äußere (unnormierte) Normalenfeld der orientierten Bodenfläche K lautet hier

$$-\partial_r \Psi_K \times \partial_\varphi \Psi_K = -(\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \times (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0) = -(0, 0, r),$$

und das äußere unnormierte Normalenfeld der Paraboloidoberfläche P ist

$$\partial_r \Psi_P \times \partial_\varphi \Psi_P = (\cos \varphi, \sin \varphi, -2r) \times (-r \sin \varphi, r \cos \varphi, 0) = (2r^2 \cos \varphi, 2r^2 \sin \varphi, r).$$

Das Flächenintegral über den Boden trägt nichts bei,

$$\begin{aligned} \int_K \langle F, n \rangle \, dS &= - \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi F(r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0) \cdot (\partial_r \Psi_K \times \partial_\varphi \Psi_K) \\ &= - \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \cos \varphi = 0. \end{aligned}$$

Das Flächenintegral über die Paraboloidoberfläche ergibt dagegen

$$\begin{aligned} \int_P \langle F, n \rangle \, dS &= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi F(r \cos \varphi, r \sin \varphi, 4 - r^2) \cdot (\partial_r \Psi_P \times \partial_\varphi \Psi_P) \\ &= 2\pi \int_0^2 dr (r^3 + 4r) = 2\pi \left(\frac{2^4}{4} + 4 \frac{2^2}{2} \right) = 24\pi. \end{aligned}$$

Somit ist der Gesamtfluss des Vektorfeldes F durch den Rand des Paraboloidenstumpfes

$$\int_{\partial M} \langle F, v \rangle dS = 24\pi.$$

Nun berechnen wir die Quellstärke des Vektorfeldes F innerhalb des Paraboloidenstumpfes:

Wir integrieren nun die Divergenz von F über M . Die Divergenz von F lautet $\operatorname{div} F = 3$, und deshalb finden wir

$$\int_M \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = 3|M| = 3\pi \int_0^4 dz r(z)^2 = 3\pi \int_0^4 dz (4-z) = 24\pi.$$

Dabei bezeichnet $|M|$ das Volumen von M und $r(z) = \sqrt{4-z}$ den Radius des Kreises der entsteht, wenn M mit der Ebene mit konstantem z geschnitten wird. Somit gilt auch hier

$$\int_M \nabla \cdot F d^3x = 24\pi, \text{ womit der Satz von Gau\ss}$$

$$\int_M \operatorname{div} F d^3x = \int_{\partial M} \langle F, v \rangle dS$$

in diesem speziellen Fall explizit bestätigt ist.

H4.2. Eine Integralidentitat

Sei A ein orientiertes Flächenstück auf das der Satz von Stokes anwendbar ist. Zeigen Sie für $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$

$$\int_{\partial A} f(r) \nabla g(r) \cdot dr = \int_A \langle \nabla f \times \nabla g, v \rangle dS.$$

LÖSUNG:

Man wendet den Satz von Stokes auf das Vektorfeld $f \nabla g$ an. Dazu berechnet man die Rotation

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot}(f \nabla g))_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j (f \partial_k g) = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j f \partial_k g + f \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k g \\ &= (\nabla f \times \nabla g)_i + (f \nabla \times \nabla g)_i = (\nabla f \times \nabla g)_i, \end{aligned}$$

da $\nabla \times \nabla g = 0$. Also gilt die Behauptung

$$\int_{\partial A} f(r) \nabla g(r) \cdot dr = \int_A \langle \nabla f \times \nabla g, v \rangle dS.$$

H4.3. Satz von Stokes

Sei $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2z = 0, z \leq 2\}$ mit in positive z -Richtung orientiertem Normalenfeld. Berechnen Sie für das Vektorfeld $F(x, y, z) = (3y, -2xz, yz^2)$ den Fluss der Rotation von F durch A direkt und mittels der Zirkulation von F entlang ∂A über den Satz von Stokes.

LÖSUNG:

Eine Parametrisierung der Fläche A in Polarkoordinaten ist $\Psi(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, \frac{r^2}{2})$, $r \in [0, 2]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, wobei die problematischen Punkte $r = 0$ und $\phi = 0, 2\pi$, eine 2-dimensionale Nullmenge bilden. Das (unnormierte) Normalenfeld ist

$$\partial_1 \Psi \times \partial_2 \Psi = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \phi \\ r \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r^2 \cos \phi \\ -r^2 \sin \phi \\ r \end{pmatrix}.$$

Für die Rotation von F ergibt sich

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3y \\ -2xz \\ yz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 + 2x \\ 0 \\ -2z - 3 \end{pmatrix}.$$

Somit lautet der Fluss von F durch A

$$\begin{aligned} \int_A \langle \operatorname{rot} F, v \rangle dS &= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} \frac{r^4}{4} + 2r \cos \phi \\ 0 \\ -r^2 - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r^2 \cos \phi \\ -r^2 \sin \phi \\ r \end{pmatrix} \\ &= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \left(-\frac{r^6}{4} \cos \phi - 2r^3 \cos^2 \phi - r^3 - 3r \right) \\ &= 2\pi \int_0^2 (-r^3 - r^3 - 3r) dr = -16\pi - 12\pi = -28\pi. \end{aligned}$$

Der Rand von F wird parametrisiert durch $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2)$, $t \in [0, 2\pi]$. Dies ist die richtige Durchlaufrichtung für das nach oben orientierte Flächenstück. Somit erhält man über den Satz von Stokes

$$\begin{aligned} \int_A \langle \operatorname{rot} F, v \rangle dS &= \int_{\gamma} F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(2 \cos t, 2 \sin t, 2) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 6 \sin t \\ -8 \cos t \\ 8 \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ 2 \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = -28\pi. \end{aligned}$$