TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. S. Kaniber
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2020W

Wintersem. 2020/21
Lösungsblatt 3
(19.11.2020)

Zentralübung

Z3.1. Gramsche Determinante und k–dimensionales Volumen

Gegeben seien drei linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$. Das 3-dimensionalen Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallotops

$$P = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 : \alpha_i \in [0,1], i = 1,2,3\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

ist laut Vorlesung $\mathrm{vol}_3(P) = \sqrt{\det V^{\mathrm{T}} V}$, wobei $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times 3}$. Begründen Sie diese Definition anschaulich mit Hilfe des Spatprodukts

(a) für $d = 3$,

(b) für $d > 3$ und $v_i \in \mathbb{R}^3 \times \{0\}^{d-3}$,

(c) für $d > 3$ und beliebige $v_i \in \mathbb{R}^d$ durch Rückführung auf (b) mittels einer geeigneten orthogonalen Transformation.

(d) Formulieren Sie eine Verallgemeinerung für k Vektoren im $\mathbb{R}^d$.

Lösung:

(a) Bekannterweise ist das Volumen gegeben durch den Betrag des Spatprodukts

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_3(P) &= |v_1 \cdot (v_2 \times v_3)| = |\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}| = |\det V| \\ &= \sqrt{\det(V^{\mathrm{T}})\det(V)} = \sqrt{\det(V^{\mathrm{T}} V)}.\end{aligned}$$

(b) Nur jeweils die ersten drei Komponenten von v_i sind verschieden von Null. Seien $\tilde{v}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1,2,3$, die Vektoren, die aus den ersten drei Komponenten der entsprechenden v_i's bestehen. Dann ist

$$\mathrm{vol}_3(P) = |\tilde{v}_1 \cdot (\tilde{v}_2 \times \tilde{v}_3)| = |\det \tilde{V}| = \sqrt{\det(\tilde{V}^{\mathrm{T}}\tilde{V})} = \sqrt{\det(V^{\mathrm{T}} V)}.$$

(c) Der $\mathbb{R}^d$ besitzt eine ONB $(b_1, \dots, b_d)$ mit $b_1, b_2, b_3 \in \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3)$ und $b_4, \dots, b_d \in \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3)^{\perp}$. Die orthogonale Matrix $O = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_d \end{pmatrix}$ bildet e_i auf b_i ab. $O^{\mathrm{T}} v_1, O^{\mathrm{T}} v_2, O^{\mathrm{T}} v_3$ liegen also in $\mathbb{R}^3 \times \{0\}^{d-3}$ und spannen das selbe 3–dimensionale Volumen auf wie v_1, v_2, v_3. Nach (b) gilt also

$$\mathrm{vol}_3(P) = \sqrt{\det((O^{\mathrm{T}} V)^{\mathrm{T}}(O^{\mathrm{T}} V))} = \sqrt{\det(V^{\mathrm{T}} O O^{\mathrm{T}} V)} = \sqrt{\det(V^{\mathrm{T}} V)}.$$

(d) Seien $v_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots k$. Dann ist das Volumen $\mathrm{vol}_k(P)$ des im d-dimensionalen Raum aufgespannten k-dimensionalen Parallotops

$$P = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k : \alpha \in [0,1]^k\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

gegeben durch die Wurzel aus der Gramschen Determinante

$$\mathrm{vol}_k(P) = \sqrt{\det(V^{\mathrm{T}} V)},$$

wobei $V = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times k}$ und somit $V^{\mathrm{T}} V \in \mathbb{R}^{k\times k}$ ist.

Z3.2. Parametrisierungsinvarianz des Oberflächenintegrals

Seien $\Phi : U \to M$ und $\Psi : V \to M$ zwei lokale Parametrisierungen einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit $W := \Phi(U) = \Psi(V)$ und $f : W \to \mathbb{R}$ stetig und nichtnegativ. Man zeige

$$\int\limits_V f(\Psi(v))\sqrt{g^\Psi(v)}\mathrm{d}v = \int\limits_U f(\Phi(u))\sqrt{g^\Phi(u)}\mathrm{d}u.$$

Lösung:

Da Φ und Ψ den gleichen Ausschnitt W der UMF parametrisieren, ist die Funktion $H := \Psi^{-1} \circ \Phi : U \to V$ ein Diffeomorphismus, wobei $U, V \in \mathbb{R}^k$ offen sind. Die Transformationsformel (für uneigentliche Integrale) mit $v = H(u)$ lautet dann

$$\int\limits_{V=H(U)} f(\Psi(v))\sqrt{g^\Psi(v)}\mathrm{d}v = \int\limits_U f(\Psi(H(u)))\sqrt{g^\Psi(H(u))}|\det J_H(u)|\mathrm{d}u.$$

Aus $\Psi \circ H = \Phi$ folgt einerseits, dass $f(\Psi(H(u))) = f(\Phi(u))$ und andererseits, dass $\underbrace{J_\Psi(H(u))}_{=:A}\underbrace{J_H(u)}_{=:C} = \underbrace{J_\Phi(u)}_{=:B}$ und damit, dass

$$g^\Psi(H(u))(\det J_H(u))^2 = \det(A^\mathrm{T}A)\det(C)\det(C^\mathrm{T}) = \det(C^\mathrm{T}A^\mathrm{T}AC) = \det(B^\mathrm{T}B) = g^\Phi(u).$$

Dies zeigt, dass das Oberflächenintegral

$$\int\limits_U f(x)\mathrm{dS}(x)$$

unabhängig von der gewählten Parametrisierung ist.

Z3.3. Einfache Beispiele für Oberflächenintegrale

Berechne den Flächeninhalt des Kegelmantels $M = \{(x, y, z) \subseteq \mathbb{R}^3 \,|\, z{=}1{-}\sqrt{x^2{+}y^2}, 0{<}z{<}1\}$

(a) durch Parametrisierung als Graph einer Funktion,

(b) durch Parametrisierung in Zylinderkoordinaten,

(c) durch geometrische Betrachtung.

Lösung:

Der Kegelmantel M (ohne Spitze) ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. In der Vorlesung wurde für zwei Spezialfälle gezeigt, für die die Berechnung der Gramschen Determinante für ein Oberflächenintegral wenig Aufwand erfordert:

- die Untermannigfaltigkeit wird (lokal) als Graph einer skalaren Funktion parametrisiert (Kodimension 1-UMF),
- die zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist beliebig parametrisiert.

(a) Für $f : B_1(0)\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 1{-}\sqrt{x^2 + y^2}$ ist $M = G_f$. f ist stetig differenzierbar mit $\nabla f(x, y) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. Somit ist

$$\mathrm{vol}_2(M) = \int\limits_M \mathrm{dS}(x) = \int\limits_{B_1(0)} \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2}\mathrm{d}(x, y) = \int\limits_{B_1(0)} \sqrt{2}\,\mathrm{d}(x, y) = \sqrt{2}\,\pi.$$

(b) Man kann M parametrisieren durch $\Phi(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi, 1-r)$, $(r,\phi) \in V$ mit $V = (0,1) \times [0,2\pi)$. Es ist $\Phi(V) = M$ und eingeschränkt auf $\mathrm{Int}(V)$ ist Φ eine Karte von M . Somit erhalten wir wegen

$$\begin{aligned}\sqrt{g^\Phi(r,\phi)} &= \sqrt{\mathrm{D}\Phi(r,\phi)^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\Phi(r,\phi)} = \|\partial_r\Phi(r,\phi) \times \partial_\phi\Phi(r,\phi)\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ r \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}\, r\end{aligned}$$

ebenfalls

$$\mathrm{vol}_2(M) = \int\limits_M \mathrm{dS}(x) = \int\limits_V \sqrt{g^\Phi(r,\phi)}\, \mathrm{d}(r,\phi) = \int\limits_0^1 \mathrm{d}r \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sqrt{2}\, r = \sqrt{2}\,\pi.$$

Bemerkung:
Genau genommen wurde hier nur die Fläche von $\tilde{M} := M \setminus \{(x,0,1-x) \,|\, x \in (0,1)\}$ berechnet. Für einen strengen Beweis, dass dies keinen Unterschied macht, könnte man ähnlich wie bei der Zerlegung der Eins das Oberflächenintegral über mindestens zwei Karten berechnen.

(c) Natürlich kann man die Mantelfläche auch elementar bestimmen: Schneidet man den Kegelmantel entlang einer geraden Linie hin zur Spitze auf und rollt ihn auf eine Ebene ab, erhält man das Kreissegment eines Kreises mit Radius $\sqrt{2}$ und einem Öffnungswinkel $2\pi\frac{1}{\sqrt{2}}$. Somit ergibt sich die Fläche $\mathrm{vol}_2(M)$ als $2\pi(\sqrt{2})^2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\pi$.

Präsenzaufgaben

P3.1. Flächeninhalt und 3-dimensionales Volumen im $\mathbb{R}^4$

(a) Welche Fläche besitzt das von den beiden Vektoren $v_1 = (1,1,1,1)$ und $v_2 = (1,1,1,-1)$ im $\mathbb{R}^4$ aufgespannte Parallelogramm?

(b) Welches dreidimensionale Volumen im $\mathbb{R}^4$ hat der von den drei Vektoren v_1, v_2 und $v_3 = (1,1,-1,1)$ aufgespannte Spat?

(c) Veranschaulichen Sie die in (a) und (b) betrachteten Mengen.

LÖSUNG:

(a) Wir erhalten mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ als Flächeninhalt des von v_1 und v_2 aufgespannten Parallelogramms

$$\mathrm{vol}_2(A[0,1]^2) = \sqrt{\det A^T A} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} = 2\sqrt{3}.$$

Geometrisch erhält man dieses Ergebnis, wenn man berücksichtigt, dass $|v_1| = |v_2| = 2$ und $\cos \sphericalangle(v_1,v_2) = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{|v_1||v_2|} = \frac{1}{2}$, also $\sin \sphericalangle(v_1,v_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und damit

$$\mathrm{vol}_2(A[0,1]^2) = |v_1||v_2| \sin \sphericalangle(v_1,v_2) = 2\sqrt{3}.$$

Natürlich kann man die Fläche auch mit der Parametrisierung $\Phi(r,s) = rv_1 + sv_2$, $r,s \in [0,1]$, berechnen:

$$\mathrm{vol}_2(B([0,1]^2)) = \int\limits_{B([0,1]^2)} \mathrm{dS}(x) = \int\limits_{[0,1]^2} \underbrace{\sqrt{g^\Phi(r,s)}}_{=\sqrt{\det A^T A}}\, \mathrm{d}(r,s) = 2\sqrt{3}.$$

(b) Mit der Matrix $B = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(B[0,1]^3) &= \sqrt{\det B^T B} \\
&= \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}} = 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

(c) v_1 und v_2 haben die Länge 2 und einen Winkel von $60°$ zueinander. Das Parallelogramm in (a) ist also eine Raute, die aus zwei gleichseitigen Dreiecken besteht.
v_3 auch mit der Länge 2 steht senkrecht auf v_2 und hat ebenfalls einen Winkel von $60°$ mit v_1.
v_2 und v_3 spannen also ein Quadrat der Seitenlänge 2 auf. v_1 hat einen Winkel von $45°$ zur v_2-v_3-Ebene, denn die Höhe des Spates senkrecht zur v_2-v_3-Ebene ist offenbar $\mathrm{vol}_3(B[0,1]^3)/4 = \sqrt{2}$.

P3.2. Oberflächenintegrale

Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt

(a) des Torus im $\mathbb{R}^3$, $T = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (R - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + x_3^2 = r^2\}$, $0 < r < R$,

(b) des 2-dimensionalen Torus im $\mathbb{R}^4$, $T = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_3^2 + x_4^2 = r^2\}$, $R, r > 0$.

LÖSUNG:

(a) Mit der Parametrisierung $\Phi(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} (R + r\cos\theta)\cos\phi \\ (R + r\cos\theta)\sin\phi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$, $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$ erhält man

$$\partial_\phi \Phi(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\theta)\sin\phi \\ (R + r\cos\theta)\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_\theta \Phi(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} -r\sin\theta)\cos\phi \\ -r\sin\theta)\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\|\partial_\phi \Phi \times \partial_\theta \Phi\| = \left\| (R + r\cos\theta) r \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right\| = (R + r\cos\theta) r.$$

Somit ist

$$\mathrm{vol}_2(T) = \int_T \mathrm{dS}(x) = \int_{[0,2\pi]^2} \|\partial_\phi \Phi \times \partial_\theta \Phi\| \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (R + r\cos\theta) r \, \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\theta = (2\pi R)(2\pi r).$$

(b) T wird z.B. parametrisiert durch $\Phi(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\phi \\ R\sin\phi \\ r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$, $\phi, \theta \in [0, 2\pi]$. Die Jacobimatrix ist

$$J_\Phi(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} -R\sin\phi & 0 \\ R\cos\phi & 0 \\ 0 & -r\sin\theta \\ 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Somit ist die Gramsche Determinante

$$\det(J_\Phi(\phi,\theta)^T J_\Phi(\phi,\theta)) = \det \begin{pmatrix} R^2(\sin^2\phi + \cos^2\phi) & 0 \\ 0 & r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \end{pmatrix} = R^2 r^2.$$

Somit ist der Flächeninhalt von T gleich

$$\mathrm{vol}_2(T) = \int_T \mathrm{dS}(x) = \int_{[0,2\pi]^2} \sqrt{\det(J_\Phi(\phi,\theta)^T J_\Phi(\phi,\theta))}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta = Rr \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta = (2\pi R)(2\pi r).$$

P3.3. Gramsche Determinante und äußeres Normalenfeld von Flächen im Raum

Sei $\Psi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, eine C^1-Parametrisierung des Flächenstücks V und das Normalenfeld $n : V \to \mathbb{R}^3$ bilde in jedem Punkt $\Psi(u) \in V$ ein Rechtssystem mit den Basisvektoren des Tangentialraums $\partial_1\Psi(u)$, $\partial_2\Psi(u)$. Zeigen Sie

(a) $\sqrt{g(u)} = \|\partial_1\Psi(u) \times \partial_2\Psi(u)\|$,

(b) Für ein stetiges Vektorfeld $F : V \to \mathbb{R}^3$ ist der Fluss von F durch V in Richtung des Normalenfeldes n

$$\int_V \langle F, n\rangle \mathrm{dS} = \int_U \langle F(\Psi(u)), \partial_1\Psi(u) \times \partial_2\Psi(u)\rangle \mathrm{d}^2u.$$

LÖSUNG:

(a) Mit der Definition der Gramschen Determinante $g(u)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sqrt{g(u)} &= \sqrt{\det(J_\Psi(u)^\mathrm{T} J_\Psi(u))} = \sqrt{\det\begin{pmatrix}\langle\partial_1\Psi,\partial_1\Psi\rangle & \langle\partial_1\Psi,\partial_2\Psi\rangle\\ \langle\partial_2\Psi,\partial_1\Psi\rangle & \langle\partial_2\Psi,\partial_2\Psi\rangle\end{pmatrix}}\\ &= \sqrt{\|\partial_1\Psi\|^2\|\partial_2\Psi\|^2 - \langle\partial_1\Psi,\partial_2\Psi\rangle^2} = \|\partial_1\Psi\|\|\partial_2\Psi\|\sqrt{1-\cos^2\sphericalangle(\partial_1\Psi,\partial_2\Psi)}\\ &= \|\partial_1\Psi(u) \times \partial_2\Psi(u)\|.\end{aligned}$$

(b) Nach Definition ist

$$\int_V \langle F, n\rangle \mathrm{d}S = \int_U \langle F(\Psi(u)), n(\Psi(u))\rangle \sqrt{g(u)}\mathrm{d}^2u$$

Für das rechts orientierte Normalenfeld an V gilt

$$n(\Psi(u)) = \frac{\partial_1\Psi(u) \times \partial_2\Psi(u)}{\|\partial_1\Psi(u) \times \partial_2\Psi(u)\|}, \qquad \sqrt{g(u)}n(\Psi(u)) = \partial_1\Psi(u) \times \partial_2\Psi(u)$$

Somit folgt die Behauptung.

Hausaufgaben

H3.1. Flächeninhalt eines Katenoiden

Berechnen Sie den Flächeninhalt der durch Rotation einer Kettenlinie um die z-Achse entstehende Untermannigfaltigkeit $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} = \cosh z, -1 < z < 1\}$.

LÖSUNG:

Als Parametrisierung kann man zum Beispiel $\Psi(\phi,z) = \begin{pmatrix}\cosh(z)\cos(\phi)\\ \cosh(z)\sin(\phi)\\ z\end{pmatrix}$ wählen, wobei $(\phi,z) \in U := (0,2\pi)\times(-1,1)$. Nun ist

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_2(M) &= \int_M \mathrm{dS}(x) \overset{(*)}{=} \int_{\Psi(U)} \mathrm{dS}(x) = \int_U \sqrt{g(\phi,z)}\,\mathrm{d}(\phi,z)\\ &= \int_U \|\partial_\phi\Psi(\phi,z) \times \partial_z\Psi(\phi,z)\|\,\mathrm{d}(\phi,z)\\ &= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\cosh(z)^2 = 2\pi\Big[\tfrac{1}{2}(z+\sinh(z)\cosh(z))\Big]_{-1}^{1}\\ &= \pi(2+2\sinh(1)\cosh(1)) = 2\pi + \tfrac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2 - \tfrac{1}{\mathrm{e}^2}),\end{aligned}$$

da

$$\sqrt{g(\phi,z)} = \|\partial_\phi \Psi(\phi,z) \times \partial_z \Psi(\phi,z)\| = \left\| \begin{pmatrix} -\cosh(z)\sin(\phi) \\ \cosh(z)\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sinh(z)\cos(\phi) \\ \sinh(z)\sin(\phi) \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} \cosh(z)\cos(\phi) \\ \cosh(z)\sin(\phi) \\ -\cosh(z)\sinh(z) \end{pmatrix} \right\| = \cosh(z)^2$$

und $\int \cosh(x)^2 \mathrm{d}x = \sinh(x)\cosh(x) - \int \sinh(x)^2 \mathrm{d}x = \sinh(x)\cosh(x) + x - \int \cosh(x)^2 \mathrm{d}x$.
$(*)$ Die Mengen M und $\Psi(U)$ unterscheiden sich nur um die Menge $\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in [-1,1], x = \cosh(z)\}$, welche keinen Beitrag zum Oberflächenintegral liefert.

H3.2. Fläche eines Sattels

Gegeben ist die Fläche $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 - y^2 - z = 0\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt jeweils von

(a) $A_1 = A \cap \{x^2 + y^2 \leq 2\}$.

(b) $A_2 = A \cap \{|x| \leq 1 \text{ und } |y| \leq 1\}$ (Reduzieren Sie auf ein Einfachintegral, welches z.B. per Computeralgebra-Programm und/oder numerisch ausgewertet werden soll),

(c) $A_3 = A \cap \{|x| + |y| \leq \sqrt{2}\}$,

Als Parametrisierungen stehen zur Auswahl: (x,y) oder (u,v) mit $u = x+y$, $v = x-y$ oder (r,ϕ) mit $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. Benutzen Sie $\int \frac{1}{\sqrt{c+t^2}} \mathrm{d}t = \ln(t + \sqrt{c+t^2}) + C$.

Lösung:

(a) $\Sigma(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ r^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi) \end{pmatrix}$ parametrisiert A_1 für $r \in [0,\sqrt{2}]$ und $\phi \in [0,2\pi[$. Es ist

$$\begin{aligned} \|\Sigma_r(r,\phi) \times \Sigma_\phi(r,\phi)\| &= \left\| \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 2r(\cos^2\phi - \sin^2\phi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ -4r^2\sin\phi\cos\phi \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} -4r^2\sin^2\phi\cos\phi - 2r^2\cos^3\phi + 2r^2\cos\phi\sin^2\phi \\ -2r^2\cos^2\phi\sin\phi + 2r^2\sin^3\phi + 4r^2\cos^2\phi\sin\phi \\ r \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} -2r^2\cos\phi \\ 2r^2\sin\phi \\ r \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{4r^4 + r^2} = r\sqrt{1+4r^2}, \quad (r \geq 0) \end{aligned}$$

Die Fläche von A_1 ist dann

$$\mathrm{vol}_2(A_1) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r\sqrt{1+4r^2}\, \mathrm{d}\phi \mathrm{d}r = 2\pi \left[\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{8}(1+4r^2)^{3/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi(\tfrac{27}{12} - \tfrac{1}{12}) = \frac{13}{3}\pi.$$

(b) $\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$ parametrisiert A_2 für $x \in [-1,1]$ und $y \in [-1,1]$. Es ist

$$\|\Phi_x(x,y) \times \Phi_y(x,y)\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

Somit lautet die Fläche von A_2,

$$\mathrm{vol}_2(A_2) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Das innere Integral ist, mit $4c = 1+4x^2$,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{4c+4y^2}\,\mathrm{d}y &= 4\int_0^1 1\cdot\sqrt{c+y^2}\,\mathrm{d}y = 4\left[y\sqrt{c+y^2}\right]_0^1 - 4\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{c+y^2}}\,\mathrm{d}y \\
&= 4\sqrt{c+1} - 4\int_0^1 \frac{c+y^2}{\sqrt{c+y^2}}\,\mathrm{d}y + 4\int_0^1 \frac{c}{\sqrt{c+y^2}}\,\mathrm{d}y \\
&= 4\sqrt{c+1} - 4\int_0^1 \sqrt{c+y^2}\,\mathrm{d}y + 4c\left[\ln(y+\sqrt{c+y^2})\right]_0^1.
\end{aligned}$$

Somit

$$\int_0^1 \sqrt{c+y^2}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{c+1} + \tfrac{1}{2}c\ln\frac{1+\sqrt{c+1}}{\sqrt{c}},$$

also wegen $c = \frac{1}{4}+x^2$,

$$\mathrm{vol}_2(A_2) = \int_{-1}^{1}\left(2\sqrt{\frac{5}{4}+x^2} + 2(\tfrac{1}{4}+x^2)\ln\frac{1+\sqrt{\frac{5}{4}+x^2}}{\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}}\right)dx \overset{(*)}{=} 4 - \tfrac{1}{3}\arctan\tfrac{4}{3} + \tfrac{7}{3}\ln 5 \approx 7.45.$$

$(*)$ Auswertung mittels eines Computeralgebra-Programms.

(c) $\Psi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u+v) \\ \frac{1}{2}(u-v) \\ uv \end{pmatrix}$ parametrisiert A_3 für $u \in [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ und $v \in [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. Es ist

$$\begin{aligned}
\|\Psi_u(u,v)\times\Psi_v(u,v)\| &= \left\|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ v\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ u\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(u+v)\\ \frac{1}{2}(v-u)\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\| \\
&= \sqrt{\tfrac{1}{4} + \frac{1}{4}(u^2+2uv+v^2) + \frac{1}{4}(u^2-2uv+v^2)} \\
&= \tfrac{1}{2}\sqrt{1+2u^2+2v^2}.
\end{aligned}$$

Die Fläche für $|u|,|v| \leq \sqrt{2}$ beträgt also

$$\mathrm{vol}_2(A_3) = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \tfrac{1}{2}\sqrt{1+2u^2+2v^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \overset{\binom{u=\sqrt{2}x}{v=\sqrt{2}y}}{=} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \mathrm{vol}_2(A_2).$$

H3.3. Flächeninhalt der d–Sphäre

Berechnen Sie das d–dimensionale Volumen A_d der d–Sphäre $S^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|x\| = 1\}$ im $\mathbb{R}^{d+1}$ mit Hilfe des Graphen von $f(y) = \sqrt{1-\|y\|^2}$, $y \in \mathbb{R}^d$, $\|y\| < 1$.

Hinweis: Man verwende $\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \pi$ für $a > 0$ und führe auf das $(d-1)$-dimensionale Kugelvolumen aus H2.3 zurück.

LÖSUNG:

Die d-dimensionale Kugelsphäre setzt sich als disjunkte Vereinigung aus eine oberen und einer unteren Halbkugelschale und dem Schnitt mit der $(x_1, \ldots, x_d)$-Ebene, die allerdings keinen Beitrag zur Fläche liefert:
$S^d = G_f \dot{\cup} G_{-f} \dot{\cup} (S^{d-1} \times \{0\})$ mit $f : \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, \|x\| < 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}$, $\nabla f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-\|x\|^2}}$. Also ist nach der Formel für die Fläche von Graphen

$$A_d = \mathrm{vol}_d(S^d) = 2 \int\limits_{\|x\|<1} \sqrt{1 + \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|^2}} \mathrm{d}^d x = 2 \int\limits_{\|x\|<1} \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} \mathrm{d}^d x$$

$$= 2 \int\limits_{\{y \in \mathbb{R}^{d-1} \,|\, \|y\|<1\}} \mathrm{d}^{d-1} y \int\limits_{-\sqrt{1-\|y\|^2}}^{\sqrt{1-\|y\|^2}} \mathrm{d}x_n \frac{1}{\sqrt{1 - \|y\|^2 - x_n^2}} \overset{\text{Hinweis}}{=} 2\pi \int\limits_{\|y\|<1} \mathrm{d}^{d-1} y = 2\pi V_{d-1}.$$