



## Zentralübung

### Z3.1. Gramsche Determinante und $k$ -dimensionales Volumen

Gegeben seien drei linear unabhängige Vektoren  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$ . Das 3-dimensionale Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds

$$P = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 : \alpha_i \in [0, 1], i = 1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{R}^d$$

ist laut Vorlesung  $\text{vol}_3(P) = \sqrt{\det V^T V}$ , wobei  $V = (v_1 \ v_2 \ v_3) \in \mathbb{R}^{d \times 3}$ . Begründen Sie diese Definition anschaulich mit Hilfe des Spatprodukts

- (a) für  $d = 3$ ,
- (b) für  $d > 3$  und  $v_i \in \mathbb{R}^3 \times \{0\}^{d-3}$ ,
- (c) für  $d > 3$  und beliebige  $v_i \in \mathbb{R}^d$  durch Rückführung auf (b) mittels einer geeigneten orthogonalen Transformation.
- (d) Formulieren Sie eine Verallgemeinerung für  $k$  Vektoren im  $\mathbb{R}^d$ .

### Z3.2. Parametrisierungsinvarianz des Oberflächenintegrals

Seien  $\Phi : U \rightarrow M$  und  $\Psi : V \rightarrow M$  zwei lokale Parametrisierungen einer  $k$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit  $W := \Phi(U) = \Psi(V)$  und  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und nichtnegativ. Man zeige

$$\int_V f(\Psi(v)) \sqrt{g^\Psi(v)} dv = \int_U f(\Phi(u)) \sqrt{g^\Phi(u)} du.$$

### Z3.3. Einfache Beispiele für Oberflächenintegrale

Berechne den Flächeninhalt des Kegelmantels  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, 0 < z < 1\}$

- (a) durch Parametrisierung als Graph einer Funktion,
- (b) durch Parametrisierung in Zylinderkoordinaten,
- (c) durch geometrische Betrachtung.

## Präsenzaufgaben

### P3.1. Flächeninhalt und 3-dimensionales Volumen im $\mathbb{R}^4$

- (a) Welche Fläche besitzt das von den beiden Vektoren  $v_1 = (1, 1, 1, 1)$  und  $v_2 = (1, 1, 1, -1)$  im  $\mathbb{R}^4$  aufgespannte Parallelogramm?
- (b) Welches dreidimensionale Volumen im  $\mathbb{R}^4$  hat der von den drei Vektoren  $v_1, v_2$  und  $v_3 = (1, 1, -1, 1)$  aufgespannte Spat?
- (c) Veranschaulichen Sie die in (a) und (b) betrachteten Mengen.

### P3.2. Oberflächenintegrale

Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt

- (a) des Torus im  $\mathbb{R}^3$ ,  $T = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (R - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + x_3^2 = r^2\}$ ,  $0 < r < R$ ,
- (b) des 2-dimensionalen Torus im  $\mathbb{R}^4$ ,  $T = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_3^2 + x_4^2 = r^2\}$ ,  $R, r > 0$ .

### P3.3. Gramsche Determinante und äußeres Normalenfeld von Flächen im Raum

Sei  $\Psi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  offen, eine  $C^1$ -Parametrisierung des Flächenstücks  $V$  und das Normalenfeld  $n : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  bilde in jedem Punkt  $\Psi(u) \in V$  ein Rechtssystem mit den Basisvektoren des Tangentialraums  $\partial_1 \Psi(u), \partial_2 \Psi(u)$ . Zeigen Sie

- (a)  $\sqrt{g(u)} = \|\partial_1 \Psi(u) \times \partial_2 \Psi(u)\|$ ,
- (b) Für ein stetiges Vektorfeld  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist der Fluss von  $F$  durch  $V$  in Richtung des Normalenfeldes  $n$

$$\int_V \langle F, n \rangle dS = \int_U \langle F(\Psi(u)), \partial_1 \Psi(u) \times \partial_2 \Psi(u) \rangle d^2 u.$$

## Hausaufgaben

### H3.1. Flächeninhalt eines Katenoiden

Berechnen Sie den Flächeninhalt der durch Rotation einer Kettenlinie um die  $z$ -Achse entstehende Untermannigfaltigkeit  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \cosh z, -1 < z < 1\}$ .

### H3.2. Fläche eines Sattels

Gegeben ist die Fläche  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 - z = 0\}$ . Berechnen Sie den Flächeninhalt jeweils von

- (a)  $A_1 = A \cap \{x^2 + y^2 \leq 2\}$ .
- (b)  $A_2 = A \cap \{|x| \leq 1 \text{ und } |y| \leq 1\}$  (Reduzieren Sie auf ein Einfachintegral, welches z.B. per Computeralgebra-Programm und/oder numerisch ausgewertet werden soll),
- (c)  $A_3 = A \cap \{|x| + |y| \leq \sqrt{2}\}$ ,

Als Parametrisierungen stehen zur Auswahl:  $(x, y)$  oder  $(u, v)$  mit  $u = x + y, v = x - y$  oder  $(r, \phi)$  mit  $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$ . Benutzen Sie  $\int \frac{1}{\sqrt{c+t^2}} dt = \ln(t + \sqrt{c+t^2}) + C$ .

### H3.3. Flächeninhalt der $d$ -Sphäre

Berechnen Sie das  $d$ -dimensionale Volumen  $A_d$  der  $d$ -Sphäre  $S^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|x\| = 1\}$  im  $\mathbb{R}^{d+1}$  mit Hilfe des Graphen von  $f(y) = \sqrt{1 - \|y\|^2}$ ,  $y \in \mathbb{R}^d, \|y\| < 1$ .

HINWEIS: Man verwende  $\int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pi$  für  $a > 0$  und führe auf das  $(d-1)$ -dimensionale Kugelvolumen aus H2.3 zurück.

**Hausaufgabenabgabe:** Freitag, 4.12.2020, bis 12:00 in Moodle, maximal zu zweit