TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. S. KANIBER
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 4 (Analysis 3)

www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2020W

Wintersem. 2020/21
Lösungsblatt 2
(12.11.2020)

Zentralübung

Z2.1. Transformationssatz

Wenden Sie jeweils den Transformationssatz aus der Vorlesung an, um die folgenden Integrale zu berechnen. Man wähle geeignete ausschöpfende Folgen.

(a) $\int\limits_{[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, Transformation $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1, 1)$, $g(u) = \sin u$.

(b) $\operatorname{vol}(B)$ mit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1 - \frac{y^2}{4}\}$ direkt und mit der Transformation

$$g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad g(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv).$$

BEMERKUNG: g entspricht der komplexen Quadratfunktion $z \mapsto z^2$.

LÖSUNG:

(a) g ist ein Diffeomorphismus, $|\det J_g(u)| = g'(u) = \cos u > 0$ für $u \in U := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ offen. Die $A_k = [-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{k}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}] \subseteq U$ sind beschränkt mit Nullrand und bilden eine ausschöpfende Folge von $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $g(A_n)$ ist auch ausschöpfende Folge von $[-1, 1]$. Somit gilt

$$\int\limits_{[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{g(A_k)} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Transf.}}{=} \lim_{k\to\infty} \int\limits_{A_k} \sqrt{1-g(u)^2}|\det J_g(u)|\mathrm{d}u$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{k}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{k}} \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,\mathrm{d}u = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

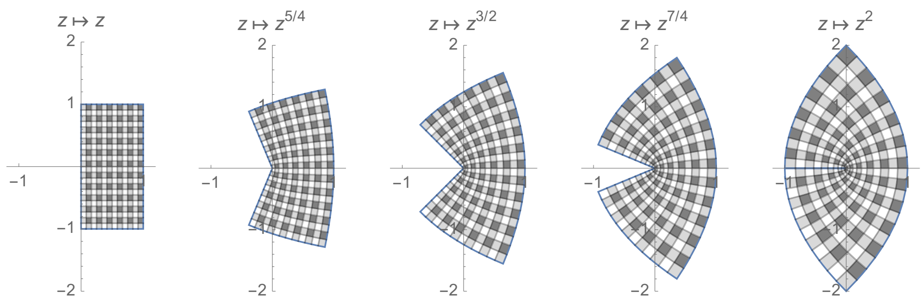
Die Substitutionsregel aus dem ersten Semester

$$\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(g(u))g'(u)\mathrm{d}u$$

ist also im Wesentlichen die eindimensionale Version der Transformationsformel.

(b) Optional: Man kann die Fläche des Normalbereichs direkt ausrechnen

$$\operatorname{vol}(B) = \int\limits_B \mathrm{d}^2x = \int\limits_{-2}^{2} \mathrm{d}y \int\limits_{-1+\frac{y^2}{4}}^{1-\frac{y^2}{4}} \mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{2} (2 - \tfrac{y^2}{2})\mathrm{d}y = 8 - 2\tfrac{2^3}{6} = \frac{16}{3}.$$



Die angegebenen Transformation ist ein Diffeomorphismus $g : U \to g(U)$ mit $U = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Anschaulich ist das klar, da die Quadratfunktion die komplexe Halbebene mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ bijektiv auf die geschlitzte komplexe Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ abbildet. Beweis durch Angabe der Umkehrfunktion (ohne Herleitung):

$$g^{-1}(x,y) = (\mathrm{Re}(\sqrt{x+\mathrm{i}y}), \mathrm{Im}(\sqrt{x+\mathrm{i}y}) = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}, \mathrm{sgn}(y)\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}\right).$$

Die Jacobi-Determinante ist

$$|\det J_g(u,v)| = \left|\det\begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix}\right| = 4(u^2+v^2).$$

Außerdem ist $B = \overline{g(A)}$ mit $A = (0,1] \times [-1,1]$. Für die Ränder gilt z.B.

$$\begin{aligned}
\{g(1,s) \,|\, s \in [-1,1]\} &= \{(1-s^2, 2s) \,|\, s \in [-1,1]\} = \{(1-\tfrac{y^2}{4}, y) \,|\, y \in [-2,2]\} \\
\{g(s,1) \,|\, s \in [0,1]\} &= \{(s^2-1, 2s) \,|\, s \in [0,1]\} = \{(\tfrac{y^2}{4}-1, y) \,|\, y \in [0,2]\} \\
\{g(s,-1) \,|\, s \in [0,1]\} &= \{(s^2-1, -2s) \,|\, s \in [0,1]\} = \{(\tfrac{y^2}{4}-1, y) \,|\, y \in [-2,0]\}
\end{aligned}$$

Da der Rand von A und $g(A)$ jeweils eine Nullmenge ist, gilt

$$\int_B \mathrm{d}^2x = \int_{g(A)} \mathrm{d}^2x \overset{(*)}{=} \int_A |\det J_g(u,v)| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = 4\int_0^1 \mathrm{d}u \int_{-1}^1 \mathrm{d}v(u^2+v^2) = 4(\tfrac{1}{3}\cdot 2 + 1\cdot\tfrac{2}{3}) = \frac{16}{3}.$$

Der Zwischenschritt über die ausschöpfende Folge $A_k = [\frac{1}{k}, 1] \times [-1,1]$, für die auch $g(A_k)$ eine ausschöpfende Folge von B ist, um den Transformationssatz aus der Vorlesung anzuwenden, wurde bei $(*)$ weggelassen.

Z2.2. Transformationssatz für uneigentliche Integrale

Man beweise: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g : U \to g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei (A_k) eine ausschöpfende Folge kompakter Mengen von U, so dass $(g(A_k))$ eine ausschöpfende Folge von $g(U)$ ist. Dann gilt

$$\int_{g(U)} f(x)\mathrm{d}^n x = \int_U f(g(u))|\det J_g(u)|\mathrm{d}^n u$$

falls auf einer Seite das Integral im uneigentlichen Sinne existiert.

Lösung:

Beweisskizze:

$$\int_{g(U)} f(x)\mathrm{d}^n x \overset{(*)}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{g(A_k)} f(x)\mathrm{d}^n x \overset{\text{Transf.}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f(g(u))|\det J_g(u)|\mathrm{d}^n u \overset{(*)}{=} \int_U f(g(u))|\det J_g(u)|\mathrm{d}^n u.$$

Nach Voraussetzung gilt mindestens eine der Gleichungen $(*)$ und damit auch die andere (gegebenenfalls jeweils für $f_\pm$ getrennt).

Z2.3. Transformationssatz für Zylinder- und Kugelkoordinaten

Zeigen Sie für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar:

- (Zylinderkoordinaten)
$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}^3x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\phi, r\sin\phi, z)\ r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z,$$
wenn die Integrale auf der linken Seite existieren.
- (Kugelkoordinaten)
$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}^3x = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\ r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r,$$
wenn die Integrale auf der linken Seite existieren.

LÖSUNG:

ANMERKUNGEN: Bestimmte Transformationen, wie zum Beispiel auf Polar-, Zylinder- oder Kugelkoordinaten werden sehr oft verwendet. Wegen Überschneidungen in den Winkelkoordinaten ist der Transformationssatz aus der vorherigen Aufgabe nicht unmittelbar anwendbar. Einmal etabliert können diese Transformationen jedoch unter den obengenannten leicht zu überprüfenden Voraussetzungen angewendet werden. ZUR ERINNERUNG: f uneigentlich Riemann-integrierbar auf einer (möglicherweise unbeschränkten) Menge bedeutet: Negativteil $f_- = \max\{-f,0\}$ und Positivteil $f_+ = \max\{f,0\}$ der Funktion f sind uneigentlich Riemann-integrierbar (Riemann-integrierbar entlang einer ausschöpfenden Folge) aber der Wert des uneigentlichen Integrals ist wenigstens für f_- oder für f_+ endlich.

- Zylinderkoordinaten entsprechen der Abbildung
$$g(r,\phi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}.$$
Es ist $\det J_g(r,\phi,z) = \det\begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$
$g : \underbrace{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}}_{=:U} \to \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x \neq 0 \vee y < 0\}$ ist ein Diffeomorphismus.
Ausschöpfende Folge ist $A_k = [\frac{1}{k},k]\times[\frac{1}{k},2\pi-\frac{1}{k}]\times[-k,k]$. Da $\mathbb{R}^3\backslash g(U) = \{(x,y,z)|x = 0 \wedge y \geq 0\}$ eine Nullmenge ist gilt mit Z2.1
$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}^3x = \int\limits_{g(U)} f(x)\mathrm{d}^3x = \int\limits_U f(g(r,\phi,z))r\mathrm{d}(r,\phi,z)$$
$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(r\cos\phi, r\sin\phi, z)\ r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r.$$
- Kugelkoordinaten entsprechen der Abbildung
$$g(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$
Es ist $\det J_g(r,\theta,\phi) = \det\underbrace{\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}} \overset{(*)}{=} r^2\sin\theta.$
$(*)$ Da die Vektoren b_1, b_2, b_3 paarweise senkrecht aufeinander stehen, gilt
$$\det\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \|b_1\|\,\|b_2\|\,\|b_3\| = 1\cdot r\cdot r\sin\theta.$$

$g : \underbrace{(0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)}_{=:U} \to \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x\neq 0 \vee y<0\}$ ist ein Diffeomorphismus. Ausschöpfende Folge ist $A_k = [\frac{1}{k},k]\times[\frac{1}{k},\pi-\frac{1}{k}]\times[\frac{1}{k},2\pi-\frac{1}{k}]$.
Da $\mathbb{R}^3\setminus g(U) = \{(x,y,z)|x=0\wedge y\geq 0\}$ wieder eine Nullmenge ist gilt mit Z2.2

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}^3x = \int_{g(U)} f(x)\mathrm{d}^3x = \int_U f(g(r,\theta,\phi))r^2\sin\theta\mathrm{d}(r,\theta,\phi)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\; r^2\sin\theta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r.$$

Präsenzaufgaben

P2.1. Gegenbeispiel zu Fubini

Sei $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y+2)^3}$ und $Q := (\mathbb{R}_0^+)^2$. Versuchen Sie $\int_Q f(x)\mathrm{d}^2x$ einmal in kartesischen und in Polarkoordinaten zu berechnen. Wenn Sie unterschiedliche Ergebnisse bekommen, erklären Sie dies.
Hinweis: $\frac{\partial}{\partial y}\frac{y+1}{(x+y+2)^2} = \frac{x-y}{(x+y+2)^3}$, Substitution $\phi\mapsto\frac{\pi}{2}-\phi$.
Lösung:

kartesisch:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\int_0^\infty \mathrm{d}y\frac{x-y}{(x+y+2)^3} = \int_0^\infty \mathrm{d}x\Big[\frac{y+1}{(x+y+2)^2}\Big]_{y=0}^\infty = \int_0^\infty \mathrm{d}x\frac{-1}{(x+2)^2} = \Big[\frac{1}{x+2}\Big]_{x=0}^\infty = -\frac{1}{2}.$$

oder

$$\int_0^\infty \mathrm{d}y\int_0^\infty \mathrm{d}x\frac{x-y}{(x+y+2)^3} = \int_0^\infty \mathrm{d}y\Big[-\frac{x+1}{(x+y+2)^2}\Big]_{x=0}^\infty = \int_0^\infty \mathrm{d}y\frac{1}{(y+2)^2} = \Big[-\frac{1}{y+2}\Big]_{y=0}^\infty = \frac{1}{2}.$$

Polarkoordinaten:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\phi\, rf(r\cos\phi, r\sin\phi) = \int_0^\infty \mathrm{d}r\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\phi\frac{r^2(\cos\phi-\sin\phi)}{(r(\cos\phi+\sin\phi)+2)^3}}_{=0 \text{ wegen Subst. } \phi\mapsto\frac{\pi}{2}-\phi} = 0.$$

Der Grund für dieses vielleicht überraschende Ergebnis ist, dass $\int_Q |f(x)|dx = \infty$, d.h. f ist auf Q nicht absolut (auch nicht uneigentlich) integrierbar, wie man an

$$\int_Q f_+(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y\frac{x-y}{(x+y+2)^3} = \int_0^\infty \mathrm{d}x\Big[\frac{y+1}{(x+y+2)^2}\Big]_{y=0}^x = \int_0^\infty \mathrm{d}x\Big(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+2)^2}\Big) = \infty,$$

$$\int_Q f_-(x)\mathrm{d}x = \int_Q f_+(x)\mathrm{d}x$$

erkennt, wobei $f_+ = \max(f,0)$, $f_- = \max(-f,0)$ als nichtnegative Funktionen *uneigentlich* Riemann-integrierbar sind.
Somit ist die Anwendung des Satzes von Fubini nicht gerechtfertigt, obwohl die betrachteten iterierten Einfachintegrale sehr wohl definiert sind.

P2.2. Leibnizsche Sektorenformel in Polarkoordinaten I

Sei $\gamma : [0,2\pi]\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ eine in Polarkoordinaten gegebene geschlossene Kurve um den Ursprung, d.h., $\binom{\gamma_1}{\gamma_2}(\phi) = \binom{r(\phi)\cos\phi}{r(\phi)\sin\phi}$, mit $r : [0,2\pi]\to\mathbb{R}^+$ stetig differenzierbar und $r(0) = r(2\pi)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von γ eingeschlossenen Menge $B\subseteq\mathbb{R}^2$ mit Hilfe der Transformation $g(\rho,\phi) = \binom{\rho\cos\phi}{\rho\sin\phi}$ für (ρ,ϕ).

LÖSUNG:

g ist die Parametrisierung durch Polarkoordinaten und $\det J_g(\rho,\phi) = \rho$. Wir schränken g auf den Normalbereich $A = \{(\rho,\phi)|0 \le \phi \le 2\pi, 0 \le \rho \le r(\phi)\}$ ein. Somit ist $g(A) = B$. g ist injektiv auf $\mathbb{R}^+ \times [0,2\pi) \cap A$, denn zu jedem Punkt $(x,y) \neq 0$ der innerhalb der Kurve γ liegt, gibt es genau ein $\phi \in [0,2\pi)$ und ein $\rho > 0$, so dass $x+iy = \rho e^{i\phi}$. Die Punkte in denen g nicht injektiv ist bilden also eine Nullmenge und wir können den Transformationssatz anwenden

$$\int_B \mathrm{d}^2x = \int_{g(A)} \mathrm{d}^2x = \int_A |\det J_g(\rho,\phi)|\mathrm{d}(\rho,\phi) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{r(\phi)} \mathrm{d}\rho\,\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\phi)^2 \mathrm{d}\phi.$$

P2.3. Das Volumen der vierdimensionalen Kugel

Berechnen Sie das Volumen der vierdimensionalen Einheitskugel.
HINWEIS: Man fasse jeweils zwei Koordinaten zusammen.

LÖSUNG:

Die Kugel $B = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, \|x\| \le 1\}$ ist ein Normalbereich. Im zweiten Schritt fassen wir die ersten und die letzten beiden Variablen wieder jeweils zu einem Flächenintegral zusammen.

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(B) &= \int_B \mathrm{d}^4x = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x_1 \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \mathrm{d}x_2 \int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \mathrm{d}x_3 \int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-x_3^2}} \mathrm{d}x_4 \\
&\overset{(*)}{=} \int_{x_1^2+x_2^2\le 1} \mathrm{d}(x_1,x_2) \int_{x_3^2+x_4^2\le 1-x_1^2-x_2^2} \mathrm{d}(x_3,x_4) \overset{(**)}{=} \int_{x_1^2+x_2^2\le 1} \mathrm{d}(x_1,x_2)\pi(1-x_1^2-x_2^2) \\
&\overset{(***)}{=} \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, r\pi(1-r^2) = 2\pi^2(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}) = \frac{\pi^2}{2}.
\end{aligned}$$

$(*)$ Die Variablen x_1, x_2 werden offenbar über die Einheitskreisscheibe integriert. Setzt man $R = \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$, so erkennt man das die Variablen x_3, x_4 über den Bereich $\{(x_3,x_4) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -R \le x_3 \le R \wedge |x_4| \le \sqrt{R^2-x_3^2}\}$ laufen, also einer Kreisscheibe mit Radius R.
$(**)$ Auch ohne explizite Verwendung der Transformationsformel setzen wir die bekannte Fläche einer Kreisscheibe ein.
$(***)$ Hierbei wurde die Transformationsformel für Polarkoordinaten benutzt:
Für $g(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$, mit $\det J_g(r,\phi) = r$ und stetigem f gilt:

$$\int_{\sqrt{x^2+y^2}\le R} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} f(r\cos\phi, r\sin\phi) r\mathrm{d}(r,\phi) = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r\cos\phi, r\sin\phi) r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r.$$

Hausaufgaben

H2.1. Uneigentliche Integrale

Für welche Werte von $\alpha > 0$ existiert für $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$, das Integral über die Einheitskugel, $\int_{\|x\|\le 1} f(x)\mathrm{d}^d x$, $d = 1, 2, 3$?

LÖSUNG:

$d = 1$: Für nichtnegative Funktionen auf $\mathbb{R}$ ist absolut Riemann-integrierbar dasselbe wie uneigentlich Riemann-integrierbar (Analysis 1). Somit ist

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{2}{1-\alpha} < \infty & \text{für } \alpha < 1, \\ \infty & \text{für } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

$d = 2$:

$$\int_{\|x\|\leq 1} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}^2 x \overset{\text{auschöpf.}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\frac{1}{k}\leq\|x\|\leq 1} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}^2 x \overset{\text{Transf.}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{[\frac{1}{k}]\times[0,2\pi]} \frac{1}{r^\alpha} r \mathrm{d}(r,\phi)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\frac{1}{k}}^{1} 2\pi \frac{1}{r^{\alpha-1}} \mathrm{d}r = \begin{cases} \frac{2\pi}{2-\alpha} & \text{für } \alpha < 2, \\ \infty & \text{für } \alpha \geq 2. \end{cases}$$

$d = 3$:

$$\int_{\|x\|\leq 1} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}^3 x \overset{\text{auschöpf.}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\frac{1}{k}\leq\|x\|\leq 1} \frac{1}{\|x\|^\alpha} \mathrm{d}^3 x \overset{\text{Transf.}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{[\frac{1}{k},1]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} \frac{1}{r^\alpha} r^2 \sin\theta \mathrm{d}(r,\theta,\phi)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{\frac{1}{k}}^{1} \frac{1}{r^{\alpha-2}} \mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = \begin{cases} \frac{4\pi}{3-\alpha} & \text{für } \alpha < 3, \\ \infty & \text{für } \alpha \geq 3. \end{cases}$$

H2.2. Leibnizsche Sektorenformel in Polarkoordinaten II

Wie in P2.2 sei $\gamma(\phi) = \binom{r(\phi)\cos\phi}{r(\phi)\sin\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi]$, mit $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ stetig differenzierbar und $r(0) = r(2\pi)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von γ eingeschlossenen Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$, hier mit Hilfe der Transformation $g(\rho, \phi) = \rho\gamma(\phi)$ für $(\rho, \phi) \in A := [0, 1] \times [0, 2\pi]$.

LÖSUNG:

Es gilt $\gamma'(\phi) = \binom{r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\sin\phi}{r'(\phi)\sin\phi + r(\phi)\cos\phi}$.
g ist stetig differenzierbar mit

$$\det J_g(\rho, \phi) = \det\begin{pmatrix}\gamma(\phi) & \rho\gamma'(\phi)\end{pmatrix} = \rho(\gamma_1(\phi)\gamma_2'(\phi) - \gamma_2(\phi)\gamma_1'(\phi)) = \rho\, r(\phi)^2,$$

also ein lokaler Diffeomorphismus für $\rho > 0$. g ist injektiv auf $(0, 1] \times [0, 2\pi)$, denn zu jedem Punkt $(x, y) \neq 0$ der innerhalb der Kurve γ liegt, gibt es genau ein $\phi \in [0, 2\pi)$ und ein $s > 0$, so dass $x + \mathrm{i}y = se^{\mathrm{i}\phi}$, wodurch auch $\rho = \frac{s}{r(\phi)} \leq 1$ eindeutig bestimmt ist. Die Punkte, in denen g nicht injektiv ist, bilden also eine Nullmenge und wir können den Transformationssatz anwenden

$$\int_B \mathrm{d}^2 x = \int_{g(A)} \mathrm{d}^2 x = \int_A |\det J_g(\rho, \phi)| \mathrm{d}(\rho, \phi) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^1 \mathrm{d}\rho\, \rho\, r(\phi)^2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(\phi)^2 \mathrm{d}\phi.$$

H2.3. Das Volumen der d-dimensionalen Kugel

Sei $V_d := \mathrm{vol}(\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq 1\})$ das Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel.

(a) Berechnen Sie V_d für $d > 2$ durch Rückführung auf V_{d-2} und Polarkoordinaten.

(b) Versuchen Sie zunächst durch plausible Annahmen ein Größenordnung für das Volumen einer 25-dimensionalen Einheitskugel abzuschätzen und werten danach V_{25} numerisch aus.

Lösung:

(a)

$$V_d = \int\limits_{x_1^2+\dots+x_d^2\le 1} \mathrm{d}^d x \overset{\text{Fub}}{=} \int\limits_{x_1^2+x_2^2\le 1} \mathrm{d}(x_1,x_2) \underbrace{\int\limits_{x_3^2+\dots+x_d^2\le 1-x_1^2-x_2^2} \mathrm{d}(x_3,\dots,x_d)}_{\text{Kugel mit Radius } \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}$$

$$\overset{(*)}{=} \int\limits_{x_1^2+x_2^2\le 1} \left(\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\right)^{d-2} V_{d-2}\mathrm{d}(x_1,x_2) \overset{\text{Polarkoord.}}{=} 2\pi \int\limits_0^1 r(1-r^2)^{\frac{d-2}{2}}\mathrm{d}r V_{d-2}$$

$$= 2\pi\Big[-\frac{(1-r^2)^{\frac{d}{2}}}{d}\Big]_0^1 V_{d-2} = \frac{2\pi}{d}V_{d-2}.$$

$(*)$ Wegen der Skalierungseigenschaft des Volumens gilt

$$\operatorname{vol}(\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\le R\}) = R^n \operatorname{vol}(\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\le 1\})$$

Wegen $V_1 = 2$ und $V_2 = \pi$ gilt also für alle $k\in\mathbb{N}$

$$V_{2k} = \frac{\pi}{k}V_{2(k-1)} \overset{\text{Induktion}}{=} \frac{\pi^k}{k!},$$
$$V_{2k+1} = \frac{2\pi}{2k+1}V_{2(k-1)} \overset{\text{Induktion}}{=} 2\cdot\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{2\pi}{5}\cdots\frac{2\pi}{2k+1} = \frac{2(2\pi)^k}{(2k+1)!!},$$

wobei $(2k+1)!! = 1\cdot 3\cdots(2k+1) = \frac{(2k+1)!}{2^k k!}$ ist.

(b) Bekannterweise ist $V_1 = 2$, $V_2 = \pi \approx 3.14$, $V_3 = \frac{4}{3}\pi \approx 4.19$, $V_4 = \frac{\pi^2}{2} \approx 4.93$. Eine 25-dimensionale Einheitskugel passt gerade mal in einen Würfel mit Seitenlänge 2, der ein Volumen von $2^{25} \approx 32\cdot 10^6$ hat. Trotzdem braucht man das Volumen von mehr als tausend solcher Kugeln, um einen einzigen Einheitswürfel aufzufüllen:

$$V_{25} = \frac{2(2\pi)^{12}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots 25} = \frac{2^{25}12!\pi^{12}}{25!} \approx 0.00096$$