TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. S. KANIBER
DR. M. PRÄHOFER

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2020W

Wintersem. 2020/21
Blatt 2
(12.11.2020)

Zentralübung

Z2.1. Transformationssatz

Wenden Sie jeweils den Transformationssatz aus der Vorlesung an, um die folgenden Integrale zu berechnen. Man wähle geeignete ausschöpfende Folgen.

(a) $\int\limits_{[-1,1]} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, Transformation $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1,1)$, $g(u) = \sin u$.

(b) $\mathrm{vol}(B)$ mit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \le 1 - \frac{y^2}{4}\}$ direkt und mit der Transformation

$$g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad g(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv).$$

BEMERKUNG: g entspricht der komplexen Quadratfunktion $z \mapsto z^2$.

Z2.2. Transformationssatz für uneigentliche Integrale

Man beweise: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g : U \to g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus. Sei (A_k) eine ausschöpfende Folge kompakter Mengen von U, so dass $(g(A_k))$ eine ausschöpfende Folge von $g(U)$ ist. Dann gilt

$$\int\limits_{g(U)} f(x)\mathrm{d}^n x = \int\limits_U f(g(u))|\det J_g(u)|\mathrm{d}^n u$$

falls auf einer Seite das Integral im uneigentlichen Sinne existiert.

Z2.3. Transformationssatz für Zylinder- und Kugelkoordinaten

Zeigen Sie für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar:

- (Zylinderkoordinaten)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}^3 x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\phi, r\sin\phi, z)\; r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z,$$

wenn die Integrale auf der linken Seite existieren.

- (Kugelkoordinaten)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\mathrm{d}^3 x = \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\; r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r,$$

wenn die Integrale auf der linken Seite existieren.

Präsenzaufgaben

P2.1. Gegenbeispiel zu Fubini

Sei $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y+2)^3}$ und $Q := (\mathbb{R}_0^+)^2$. Versuchen Sie $\int\limits_Q f(x)\mathrm{d}^2x$ einmal in kartesischen und in Polarkoordinaten zu berechnen. Wenn Sie unterschiedliche Ergebnisse bekommen, erklären Sie dies.
Hinweis: $\frac{\partial}{\partial y}\frac{y+1}{(x+y+2)^2} = \frac{x-y}{(x+y+2)^3}$, Substitution $\phi \mapsto \frac{\pi}{2} - \phi$.

P2.2. Leibnizsche Sektorenformel in Polarkoordinaten I

Sei $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine in Polarkoordinaten gegebene geschlossene Kurve um den Ursprung, d.h., $\binom{\gamma_1}{\gamma_2}(\phi) = \binom{r(\phi)\cos\phi}{r(\phi)\sin\phi}$, mit $r : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^+$ stetig differenzierbar und $r(0) = r(2\pi)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von γ eingeschlossenen Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Hilfe der Transformation $g(\rho,\phi) = \binom{\rho\cos\phi}{\rho\sin\phi}$ für (ρ,ϕ).

P2.3. Das Volumen der vierdimensionalen Kugel

Berechnen Sie das Volumen der vierdimensionalen Einheitskugel.
Hinweis: Man fasse jeweils zwei Koordinaten zusammen.

Hausaufgaben

H2.1. Uneigentliche Integrale

Für welche Werte von $\alpha > 0$ existiert für $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\|x\|^\alpha}$, das Integral über die Einheitskugel, $\int\limits_{\|x\|\leq 1} f(x)\mathrm{d}^dx$, $d = 1,2,3$?

H2.2. Leibnizsche Sektorenformel in Polarkoordinaten II

Wie in P2.2 sei $\gamma(\phi) = \binom{r(\phi)\cos\phi}{r(\phi)\sin\phi}$, $\phi \in [0,2\pi]$, mit $r : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^+$ stetig differenzierbar und $r(0) = r(2\pi)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von γ eingeschlossenen Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$, hier mit Hilfe der Transformation $g(\rho,\phi) = \rho\gamma(\phi)$ für $(\rho,\phi) \in A := [0,1] \times [0,2\pi]$.

H2.3. Das Volumen der d-dimensionalen Kugel

Sei $V_d := \mathrm{vol}(\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| \leq 1\})$ das Volumen der d-dimensionalen Einheitskugel.

(a) Berechnen Sie V_d für $d > 2$ durch Rückführung auf V_{d-2} und Polarkoordinaten.

(b) Versuchen Sie zunächst durch plausible Annahmen ein Größenordnung für das Volumen einer 25-dimensionalen Einheitskugel abzuschätzen und werten danach V_{25} numerisch aus.

Hausaufgabenabgabe: Freitag, 27.11.2020, bis 12:00 in Moodle, maximal zu zweit