TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. S. Kaniber
Dr. M. Prähofer

Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)
www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA9204_2020W

Wintersem. 2020/21
Lösungsblatt 1
(5.11.2020)

Zentralübung

Z1.1. Mengen vom Lebesgue-Maß Null im $\mathbb{R}^n$

(a) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion. Dann ist der Graph von f, $G_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in Q\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+m}$.

(b) Man beweise für abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten: Jede k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist für $k < n$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$

Lösung:

Erinnerung: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Nullmenge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge von Quadern $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gibt, mit $M \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ und $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{vol}(Q_i) < \epsilon$. Teilmengen und abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wieder Nullmengen. Graphen Riemann-integrierbarer Funktionen sind Nullmengen.

(a) Für $m = 1$ folgt die Aussage aus der Vorlesung, da jede stetige auf einem Quader definierte skalare Funktion Riemann-integrierbar ist. Für $m > 1$ gilt folgendes:
Jede Komponente der Funktion $f = (f_1, \ldots, f_m)$ ist beschränkt. Somit gibt es einen Quader $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{n+m}$ mit $G_f \subset \tilde{Q}$. Wir definieren die Funktion $g : Q \times \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}$, durch $g(x, y) = f_m(x)$ für $x \in Q$ und $y \in \mathbb{R}^{m-1}$. g ist stetig, daher ist $G_g \cap \tilde{Q}$ eine Nullmenge.
Seien nun $x \in Q$, $y = (f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x))$, $z = f_m(x)$, d.h., $(x, y, z) \in G_f \subset \tilde{Q}$. Dann ist auch $g(x, y) = z$, also $(x, y, z) \in G_g \cap \tilde{Q}$.
Somit gilt $G_f \subseteq G_g \cap \tilde{Q}$, also ist auch G_f eine Nullmenge. □
(Zur Veranschaulichung: Für $n = 1$, $m = 2$ bedeutet dies, dass der Graph einer Kurve enthalten ist im Graphen einer geeigneten skalaren Funktion auf $\mathbb{R}^2$.)

(b) Aus dem letzten Semester wissen wir, dass eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ in jedem ihrer Punkte lokal als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen dargestellt werden kann. f kann auf einen nichtentarteten Quader Q eingeschränkt werden, so dass der fragliche Punkt im Graphen von $f|_{Q^\circ}$, wobei Q° das Innere von Q bezeichnet, enthalten ist.
Damit ist gezeigt, dass M lokal eine Nullmenge ist, d.h., zu jedem ihrer Punkte gibt es eine offene Umgebung, die geschnitten mit M eine Nullmenge ist.
Es bleibt zu zeigen, dass schon abzählbar viele solcher Graphen genügen, um M zu überdecken.
Ist M eine **kompakte** Untermannigfaltigkeit, so genügen sogar endlich viele Graphen. Dies folgt aus der endlichen Überdeckungseigenschaft kompakter Mengen, da wir zu jedem Punkt von M eine offene (quaderförmige) Umgebung finden können, die, geschnitten mit M, eine Nullmenge ist.
Genauso ergibt sich, dass jede kompakte Teilmenge von M eine Nullmenge ist.
Somit ist jede Untermannigfaltigkeit, die als abzählbare Vereinigung kompakter Nullmengen dargestellt werden kann eine Nullmenge.
Ist M abgeschlossen, dann betrachtet man hierfür einfach die Mengenfolge $M \cap \overline{\mathrm{B}_n(0)}$, $n \in \mathbb{N}$, und die Behauptung ist bewiesen.
Bemerkung: Die Aussage gilt für beliebige Untermannigfaltigkeiten (mit $k < n$).

Der Beweis ist technisch und soll hier nur grob skizziert werden: Man konstruiert eine abzählbare dichte Menge in M und findet um jeden ihrer Punkte eine möglichst große abgeschlossene Kugel die mit M geschnitten kompakt ist. Zu zeigen bleibt dann, dass diese abzählbar vielen kompakten Kugeln die Untermannigfaltigkeit überdecken. (siehe z.B. Satz 13.12 in `https://aam.uni-freiburg.de/agru/lehre/ws18/ana3-ru.pdf`)

Z1.2. Riemann-Integral im $\mathbb{R}^n$

Berechnen Sie die folgenden n-dimensionalen Riemann-Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{[a,b]} f'(x)\mathrm{d}x$ für $a < b$, $f \in C^1([a,b])$, (b) $\displaystyle\int_{[0,1]^2} f(x)\mathrm{d}x$ mit $f(x) = x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)$,

(c) das Volumen $\mathrm{vol}(H)$ des liegenden Halbkegels

$$H = \{(x,y,z) \,|\, 0 \le y \le 1 - |x|, z \in \left[0, \sqrt{(1-y)^2 - x^2}\right]\} \subseteq [-1,1] \times [0,1] \times [0,1] =: Q.$$

LÖSUNG:

(a) VORBEMERKUNG: Für $n = 1$ ist die Definition des n-dimensionalen Riemann-Integrals weitgehend äquivalent zur Definition aus dem ersten Semester.
Es gilt für $a \le b$ und wenn f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist:

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x).$$

Für den Fall $a > b$ ist der Ausdruck $[a,b]$ nicht definiert (oder wird manchmal der leeren Menge gleichgesetzt) und damit ist auch der Ausdruck $\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$ undefiniert (oder gleich 0). Dagegen gilt nach Konvention

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

(damit $x \mapsto \int_a^x f(s)\mathrm{d}s$ auch für $x < a$ eine Stammfunktion von f ist).

Zur Lösung der Aufgabe:
Hier gilt somit, da $a < b$ vorausgesetzt ist, nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

$$\int_{[a,b]} f'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

(b) Schreibweisen für das zweidimensionale Riemann-Integral: Für $Q = [0,1]^2$ und integrierbares $f : Q \to \mathbb{R}$ schreibt man jeweils äquivalent

$$\int_Q f(x)\mathrm{d}x = \int_Q f(x)\mathrm{d}^2x = \int_Q f(x_1,x_2)\mathrm{d}(x_1,x_2) = \int_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y).$$

Der Wert dieses Integrals wurde durch das Infimum der Obersummen definiert.

Zum Berechnen des Integrals benutzt man den Satz von Fubini:

$$\underbrace{\int\limits_{[0,1]^2} f(x,y)\mathrm{d}(x,y)}_{\text{existiert, da } f \text{ stetig auf } Q} \overset{(*)}{=} \int\limits_{[0,1]} \Bigg(\int\limits_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}x \Bigg) \mathrm{d}y \overset{(a)}{=} \underbrace{\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{Beachte Reihenfolge!}}$$

$$= \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \underbrace{\int\limits_0^1 \mathrm{d}x\, f(x,y)}_{=:\, g(y) \text{ für jedes } y} \overset{\text{NR}}{=} \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \tfrac{1}{6} y(1-y) = \frac{1}{6} \int\limits_0^1 y(1-y)\mathrm{d}y = \frac{1}{36}.$$

Erst die folgende Nebenrechnung (NR) beweist die Existenz aller auftretenden Integrale, was im Nachhinein die Anwendung des Satzes von Fubini $(*)$ rechtfertigt:

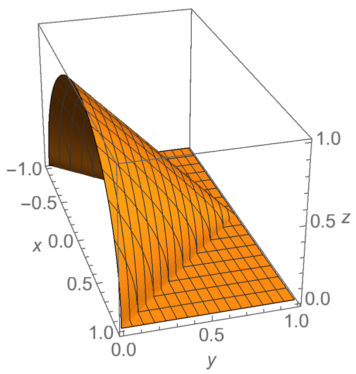
$$g(y) = \int\limits_{[0,1]} x(1-x)y(1-y)\,\mathrm{d}x = y(1-y) \int\limits_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = y(1-y)(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{6} y(1-y).$$

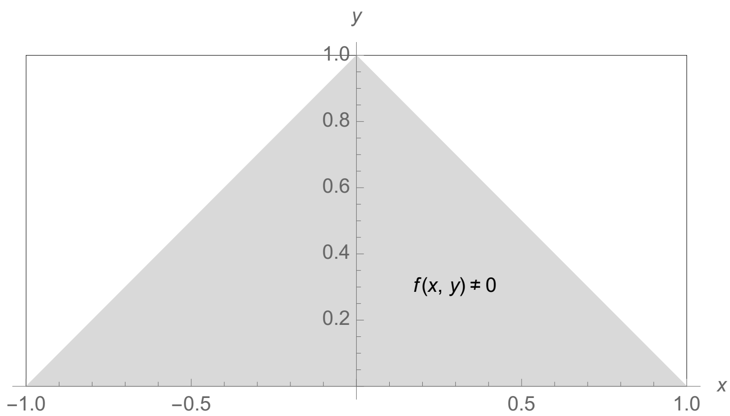
Bemerkung: Die Schreibweise $\int\limits_a^b \mathrm{d}x f(x)$ an Stelle von $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ kann bei geschachtelten Einfachintegralen die Übersichtlichkeit deutlich verbessern.

(c) Als erstes überzeugt man sich, dass der Rand der beschränkten Menge H als Vereinigung von Teilmengen von Untermannigfaltigkeiten eine Nullmenge ist. Somit ist das Volumen von H definiert. Das sich ergebende dreidimensionale Riemann-Integral kann mit Fubini auf das Volumen unter dem Graphen von $f : [-1,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{(1-y)^2 - x^2} & \text{für } |x| \leq 1 - y, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

zurückgeführt und dann weiter ausgewertet werden:





Es ist

$$\mathrm{vol}(H) = \int\limits_H \mathrm{d}^3x = \int\limits_Q \mathbb{1}_H(x)\mathrm{d}^3x \overset{\text{Fub}}{=} \int\limits_{[-1,1]\times[0,1]} \Big(\int_{[0,1]} \mathbb{1}_H(x,y,z)\mathrm{d}z \Big) \mathrm{d}(x,y)$$

$$= \int\limits_{[-1,1]\times[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Fub}}{=} \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_{-1}^1 \mathrm{d}x\, f(x,y)$$

$$= \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \underbrace{\int\limits_{-(1-y)}^{1-y} \mathrm{d}x \sqrt{(1-y)^2 - x^2}}_{\text{Fläche eines Halbkreises mit Radius } 1-y} = \int\limits_0^1 \tfrac{\pi}{2}(1-y)^2 \mathrm{d}y \overset{s=1-y}{=} \tfrac{\pi}{2} \int\limits_0^1 s^2 \mathrm{d}s = \frac{\pi}{6}.$$

Die Rechtfertigung der jeweiligen Anwendung des Satzes von Fubini, also die Existenz **aller** auftretenden Integrale (möglich aber mühsam) erübrigt sich, wenn mann erkennt, dass H ein Normalbereich ist.

Z1.3. Normalbereiche

Gegeben sei der n-dimensionalen Einheitssimplex

$$\Delta^{(n)} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1, \ldots, x_n \geq 0,\ x_1 + \ldots + x_n \leq 1 \right\} .$$

a) Zeigen Sie, dass $\Delta^{(n)}$ ein Normalbereich ist.

b) Berechnen Sie das Volumen von $\Delta^{(4)} \subseteq \mathbb{R}^4$.

LÖSUNG:

(a) Setzt man $A_1 := [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, $A_2 := \{(x,y) \in A_1 \times \mathbb{R} \,|\, 0 \leq y \leq 1 - x\} \subseteq \mathbb{R}^2$ und für $k = 3, \ldots, n$:

$$A_k := \{(x,y) \in A_{k-1} \times \mathbb{R} \,|\, 0 \leq y \leq 1 - x_1 - \cdots - x_{k-1}\} \subseteq \mathbb{R}^k$$

so gilt $A_k = \Delta^{(k)}$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ und insbesondere $\Delta^{(n)} = A_n$. Der Induktionsanfang $k = 1$ ist offensichtlich. Für den Induktionsschritt sei $A_{k-1} = \Delta^{(k-1)}$ gezeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in A_k &\iff (x_1, \ldots, x_{k-1}) \in A_{k-1} \wedge 0 \leq x_k \leq 1 - x_1 - \cdots - x_{k-1} \\ &\iff (x_1, \ldots, x_{k-1}) \in \Delta^{(k-1)} \wedge x_k \geq 0 \wedge x_1 + \cdots + x_k \leq 1 \\ &\iff x \in \Delta^{(k)}. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta^{(4)} = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, & 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1, \\ & 0 \leq x_3 \leq 1 - x_1 - x_2, 0 \leq x_4 \leq 1 - x_1 - x_2 - x_3\}. \end{aligned}$$

In dieser Form angegeben, kann das Volumen der Menge direkt mit dem Satz von Fubini für Normalbereiche durch geschachtelte Einfachintegrale ausgedrückt werden, deren Auswertung nur noch Erstsemesterstoff verwendet:

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\Delta^{(4)}) &= \int_{\Delta^{(4)}} \mathrm{d}^4 x \overset{\text{Fub}}{=} \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{1-x_1} \mathrm{d}x_2 \int_0^{1-x_1-x_2} \mathrm{d}x_3 \int_0^{1-x_1-x_2-x_3} \mathrm{d}x_4 \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{1-x_1} \mathrm{d}x_2 \underbrace{\int_0^{1-x_1-x_2} \mathrm{d}x_3 (1 - x_1 - x_2 - x_3)}_{= \left[-\frac{(1-x_1-x_2-x_3)^2}{2} \right]_{x_3=0}^{1-x_1-x_2}} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{1-x_1} \mathrm{d}x_2 \frac{(1-x_1-x_2)^2}{2} = \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \left[-\frac{(1-x_1-x_2)^3}{2 \cdot 3} \right]_{x_2=0}^{1-x_1} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \frac{(1-x_1)^3}{2 \cdot 3} = \left[-\frac{(1-x_1)^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right]_0^1 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Man kann vielleicht schon die Formel für das Volumen von $\Delta^{(n)}$ erraten. Auf dem nächsten Blatt werden wir mit einer einfachen Anwendung des Transformationssatzes eine Rekursionsformel für $\mathrm{vol}(\Delta^{(n)}$ herleiten.

Präsenzaufgaben

P1.1. Mengen vom Lebesgue-Maß Null

(a) Man gebe eine Überdeckung durch achsenparallele Rechtecke der Diagonale des Einheitsquadrats, $D = \{(x,x) \mid 0 \leq x \leq 1\}$, an, deren Flächensumme kleiner als $\epsilon > 0$ ist.

(b) Begründen Sie, warum der Graph G_f von $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^4$ ist.

LÖSUNG:

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Nullmenge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge von Quadern $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gibt, mit $M \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ und $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{vol}(Q_i) < \epsilon$ (Definition).
$M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Nullmenge, wenn sie in einer abzählbaren Vereinigung von Nullmengen enthalten ist (Kriterium).

(a) Zu $\epsilon > 0$ wähle $N \in \mathbb{N}$ größer als $\frac{1}{\epsilon}$. Dann überdecken die N Quadrate $Q_k = [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]^2$, $k = 0, \ldots, N-1$, die Diagonale D. Ihre Volumensumme ist $N \cdot (\frac{1}{N^2}) = \frac{1}{N} < \epsilon$.

(b) *1. Alternative:* der Definitionsbereich ist offen, die Funktion ist stetig differenzierbar. Also ist G_f eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$, nach Z1.1(b) also eine Nullmenge.
2. Alternative: Der Definitionsbereich der Funktion (Coulomb-Potential im $\mathbb{R}^3$) ist unbeschränkt, auch der Wertebereich ist unbeschränkt. Wir schneiden geeignet ab: Die Funktionen $f_k : [-k,k]^3 \to \mathbb{R}$, $f_k(x,y,z) = \min\{k, f(x,y,z)\}$ für $(x,y,z) \neq 0$ und $f_k(0,0,0) = k$, sind stetig auf dem Quader $[-k,k]^3$, also Riemann-integrierbar. Ihr Graph $G_{f_k} \subseteq \mathbb{R}^4$ ist also jeweils eine Nullmenge. Dann ist $G_f \subseteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} G_{f_k}$ also auch eine Nullmenge.

P1.2. Integrierbarkeit

Begründen Sie die Existenz des Riemann-Integrals $\int_Q x^y \mathrm{d}(x,y)$ mit $Q = [0,1]^2$ und versuchen Sie es auf zwei Arten zu berechnen.

LÖSUNG:

Der Integrand ist $f : Q \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^y$ ($= \mathrm{e}^{y\ln(x)}$ für $x \neq 0$, 0 für $x = 0, y > 0$ und 1 für $x = y = 0$). f ist offensichtlich stetig auf $(0,1]^2$. Außerdem gilt $0 \leq x^y \leq 1$ für $(x,y) \in Q$, da $\ln x \leq 0$ für $x \in (0,1]$.
f ist auf Q also beschränkt. Die Menge der Unstetigkeitspunkte ist auf jeden Fall in der Lebesgueschen Nullmenge $Q \setminus (0,1]^2$ enthalten (in der Tat ist $(0,0)$ der einzige Unstetigkeitspunkt. Somit existiert das gesuchte Riemann-Integral.

Wir wandeln auf zwei Arten in geschachtelte Einfachintegrale um:

$$\int\limits_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{y\ln x}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[\frac{\mathrm{e}^{y\ln x}}{\ln x} \right]_{y=0}^1 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x.$$

Die Integrale über y für festes x existieren alle (auch für $x = 0$). Das Integral über x hat auch eine bei $x = 0$ stetig durch 0 fortsetzbare Funktion, existiert also auch. Fubini ist anwendbar. Nur leider können wir das verbliebene Integral nicht mit Hilfe von elementaren Funktionen auswerten.

Zweiter Versuch:

$$\int\limits_Q f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 x^y\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_{x=0}^1 \mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \frac{1}{y+1}\mathrm{d}y = \big[\ln(1+y)\big]_0^1 = \ln 2.$$

Auch hier existieren alle auftretenden Integrale, da die Integranden der Einfachintegrale sogar überall stetig sind.

P1.3. Satz von Fubini

Berechnen Sie $\int_0^L \int_y^L \exp(-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ für $L > 0$ einmal mit und einmal ohne den Satz von Fubini.

LÖSUNG:

Die Funktion $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$, also auch auf dem dreieckigen Integrationsbereich $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,L], x \in [y,L]\} \overset{\text{Skizze!}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,L], y \in [0,x]\}$, der ein Normalbereich ist. Somit gilt nach dem Satz von Fubini für Normalbereiche

$$\int_0^L \int_y^L \exp(-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_M f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_0^L \Big(\int_0^x \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}y \Big)\mathrm{d}x = \int_0^L x\,\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$
$$= \big[-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} \big]_0^L = \tfrac{1}{2}\Big(1 - \mathrm{e}^{-L^2}\Big).$$

Für die Rechnung ist wichtig, dass das zweidimensionale Riemann-Integral im Zwischenschritt existiert (Gegenbeispiel auf Blatt 2).
Mit diesem Ergebnis kann man versuchen, auch in der anderen Integrationsreihenfolge weiterzukommen. Bezeichnet man eine beliebige Stammfunktion von $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ mit erf, so kommt man mit partieller Integration auch zum Ziel:

$$\int_0^L \int_y^L \exp(-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^L \big(\mathrm{erf}(L) - 1 \cdot \mathrm{erf}(y)\big)\mathrm{d}y = L\,\mathrm{erf}(L) - \big[y\,\mathrm{erf}(y)\big]_0^L + \int_0^L y\,\mathrm{erf}'(y)\mathrm{d}y$$
$$= L\,\mathrm{erf}(L) - L\,\mathrm{erf}(L) + \int_0^L y\,\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \big[-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2} \big]_0^L = \tfrac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-L^2}).$$

Hausaufgaben

H1.1. Mengen vom Lebesgue-Maß Null

(a) Geben Sie für die Winkelhalbierende $W := \{(x,x) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Überdeckung durch achsenparallele Rechtecke an, deren Gesamtvolumen kleiner als $\epsilon > 0$ ist.

(b) Dei Cantormenge C_∞. Sei $C_0 := [0,1]$, $C_{n+1} := \frac{1}{3}\big(C_n \cup (2 + C_n)\big)$, $C_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} C_n$. Skizzieren Sie C_0, C_1 und C_2 und begründen Sie, warum C_∞ eine Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist.
HINWEIS: Es gilt $C_{n+1} \subseteq C_n$.

LÖSUNG:

(a) Sei $\epsilon > 0$ gegeben.
Alternative 1: Die aufsummierten Längen der Quadrate müssen unbeschränkt sein. Die aufsummierten Flächen müssen dagegen beschränkt sein. Wahlen wir Quadrate Q_k, $k \in \mathbb{N}$ der Seitenlänge $\frac{\delta}{k}$ so überdecken sie aneinander gereiht die positive Halbgerade. Ihre Flächensumme ist

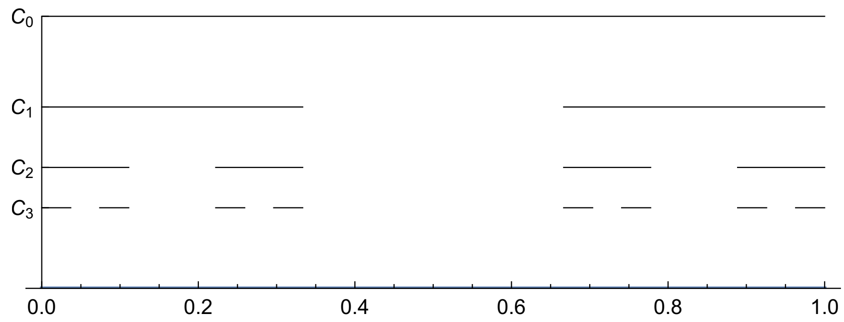
$$\delta^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{=\frac{\pi^2}{6}\ \text{(Analysis 1)}} < \delta^2 \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)}\right) = \delta^2 \left(1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} (\tfrac{1}{k-1} - \tfrac{1}{k})}_{=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots}\right) = 2\delta^2$$

Wir wählen $\delta = \sqrt{\frac{\epsilon}{2}}$, so dass $2\delta^2 = \epsilon$. Mit $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind die Quadrate dann gegeben durch $Q_n = \delta[s_n, s_n + \frac{1}{n+1}]^2$.

Alternative 2: Sei $W_k := W \cap [k, k+1]^2$, dann ist $W = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} W_k$. Nach P1.1(a) können wir jedes W_k überdecken durch Quadrate mit Flächensumme kleiner als $\frac{\epsilon}{2^{k+2}}$. Die Überdeckung von W durch immer noch abzählbar viele Quadrate hat dann die Flächensumme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+1}} = \epsilon(\tfrac{1}{2}) < \epsilon.$$

(b) Aus der Grafik ist ersichtlich, dass C_n die disjunkte Vereinigung von 2^n Intervallen $Q_i^{(n)}$ der Länge $\frac{1}{3^n}$ ist, d.h., $C_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} Q_i^{(n)}$ und $\sum_{i=1}^{2^n} \mathrm{vol}(Q_i^{(n)}) = 2^n 3^{-n} = (\frac{2}{3})^n \to 0$ für $n \to \infty$. Zu $\epsilon > 0$ gibt es also ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $C_n \supseteq C_\infty$ und $\mathrm{vol}(C_n) = (\frac{2}{3})^n < \epsilon$.



H1.2. Normalbereiche

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Vertauschen Sie für $\int_{-1}^{2} \int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ die Integrationsreihenfolge und begründen Sie ihre Schritte.

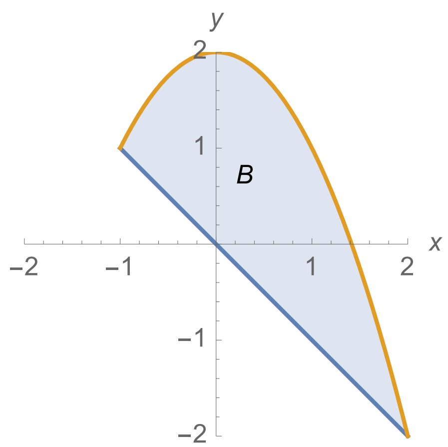
Lösung:

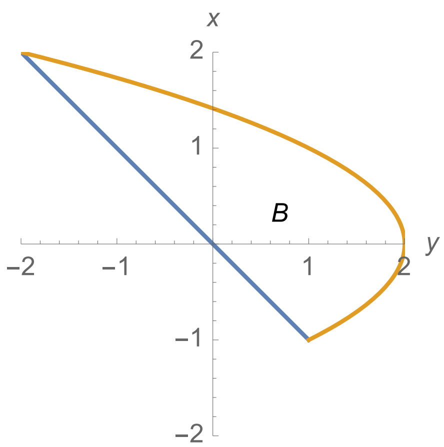
Da f stetig und der Integrationsbereich ein Normalbereich ist, existieren alle auftretenden Integrale (insbesondere die Einfachintegrale). Der Integrationsbereich ist

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 2, -x \le y \le 2 - x^2\} \\ &\overset{\text{Skizze}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \ge 0, x^2 + y \le 2\} \\ &\overset{\text{Skizze}}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le y \le 2, \max\{-y, -\sqrt{2-y}\} \le x \le \sqrt{2-y}\} \end{aligned}$$

Somit ist wegen Fubini für Normalbereiche

$$\int_{-1}^{2} \left(\int_{-x}^{2-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_B f(x,y)\mathrm{d}(x,y) = \int_{-2}^{1} \mathrm{d}y \int_{-y}^{\sqrt{2-y}} \mathrm{d}x f(x,y) + \int_{1}^{2} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} \mathrm{d}x f(x,y)$$





H1.3. Schwerpunkt und Trägheitstensor eines Oktaeders

Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| + |x_2| + |x_3| \le 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass M ein Normalbereich ist.

(b) Berechnen Sie Volumen $\mathrm{Vol}(M)$, Schwerpunkt $\vec{S}_M$ und Trägheitstensor J_M von M,

$$\vec{S}_M = \mathrm{Vol}(M)^{-1} \int\limits_M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mathrm{d}^3x, \;\; J_M = \int\limits_M \begin{pmatrix} x_2^2 + x_3^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_2x_1 & x_1^2 + x_3^2 & -x_2x_3 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}^3x.$$

LÖSUNG:

(a) $M_1 = [-1, 1]$,
$M_2 = \{(x_1, y) \in M_1 \times \mathbb{R} \mid -(1 - |x_1|) \le y \le 1 - |x_1|\}$,
$M = M_3 = \{((x_1, x_2), y) \in M_2 \times \mathbb{R} \mid -(1 - |x_1| - |x_2|) \le y \le 1 - |x_1| - |x_2|\}$.

(b) Somit ist

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(M) &= \int\limits_M \mathrm{d}^3x = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x_1 \Bigg(\int\limits_{-1+|x_1|}^{1-|x_1|} \mathrm{d}x_2 \Bigg(\int\limits_{-1+|x_1|+|x_2|}^{1-|x_1|-|x_2|} \mathrm{d}x_3 \Bigg)\Bigg) \\ &= 2 \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x_1 \int\limits_{-1+|x_1|}^{1-|x_1|} \mathrm{d}x_2 (1 - |x_1| - |x_2|) = 2 \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x_1 2\big((1 - |x_1|)^2 - \tfrac{1}{2}(1 - |x_1|)^2\big) \\ &= 2 \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x_1 (1 - |x_1|)^2 = 4 \int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}x_1 (1 - 2x_1 + x_1^2) = 4(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

$$\mathrm{vol}(M)\vec{S}_{M,z} = \int\limits_M x_3 \mathrm{d}^3x = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x_1 \int\limits_{-1+|x_1|}^{1-|x_1|} \mathrm{d}x_2 \int\limits_{-1+|x_1|+|x_2|}^{1-|x_1|-|x_2|} x_3 \mathrm{d}x_3 = 0,$$

$$\int\limits_M x_1^2 \,\mathrm{d}^3x = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x_1 \, x_1^2 \int\limits_{-1+|x_1|}^{1-|x_1|} \mathrm{d}x_2 \int\limits_{-1+|x_1|+|x_2|}^{1-|x_1|-|x_2|} \mathrm{d}x_3 \overset{\text{s.o.}}{=} 4 \int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}x_1 x_1^2 (1 - 2x_1 + x_1^2) = 4(\tfrac{1}{3} - 2\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}) = \frac{2}{15}.$$

$$J_{M,yz} = \int\limits_M x_2 x_3 \mathrm{d}^3x = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x_1 \int\limits_{-1+|x_1|}^{1-|x_1|} \mathrm{d}x_2 \, x_2 \int\limits_{-1+|x_1|+|x_2|}^{1-|x_1|-|x_2|} x_3 \mathrm{d}x_3 = 0,$$

Da in der Definition von M die Koordinaten x_1, x_2 und x_3 beliebig vertauscht werden können, folgt aus Symmetriegründen $\vec{S}_{M,z} = (0, 0, 0)$ und $J_M = \mathrm{diag}(\frac{4}{15}, \frac{4}{15}, \frac{4}{15})$.